Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Guía de Aprendizaje Nº 5

GEOMETRÍA

Educación Matemática

Primer nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje Nº 5

GEOMETRÍA

Educación Matemática

Primer nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje N°5
Geometría
Primera edición, año 2013
Inscripción Nº

Autores:
Mauricio Huircan Cabrera
Katherina Carmona Valdés

Colaboradores:
Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé,
María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo.
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:
Jose Luis Moncada Campos

Revisión editorial matemática:
Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Normalización de Estudios
División de Educación General

Impreso por:
RR Donnelley

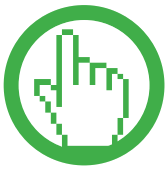
Año 2013
Impresión de 99.000 ejemplares

Iconografía

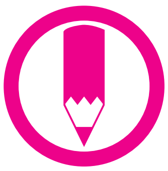
Información

Atención

Tips



Página Web



Actividad

Actividad en el cuaderno

Evaluación

Presentación

El material que la Coordinación Nacional de Normalización de Estudios para la Educación de personas jóvenes y adultas del Ministerio de Educación (Mineduc) pone a su disposición, entrega herramientas para responder a las necesidades que estas tienen en la vida diaria, tanto en el ámbito laboral y como en el social. En esta guía estudiaremos elementos de geometría.

Solucionar problemas geométricos tiene un gran valor formativo, ya que nos obliga a pensar de una manera ordenada, reflexiva y lógica, al mismo tiempo que permite desarrollar la imaginación y la sensibilidad ante el arte, la naturaleza y en general ante diferentes elementos de la vida cotidiana desde un punto de vista más analítico.

Mediante este material reconocerá en su entorno, objetos y espacios formas geométricas y notará con ello lo universales que son las matemáticas y lo útil que estas resultan para solucionar problemas cotidianos.

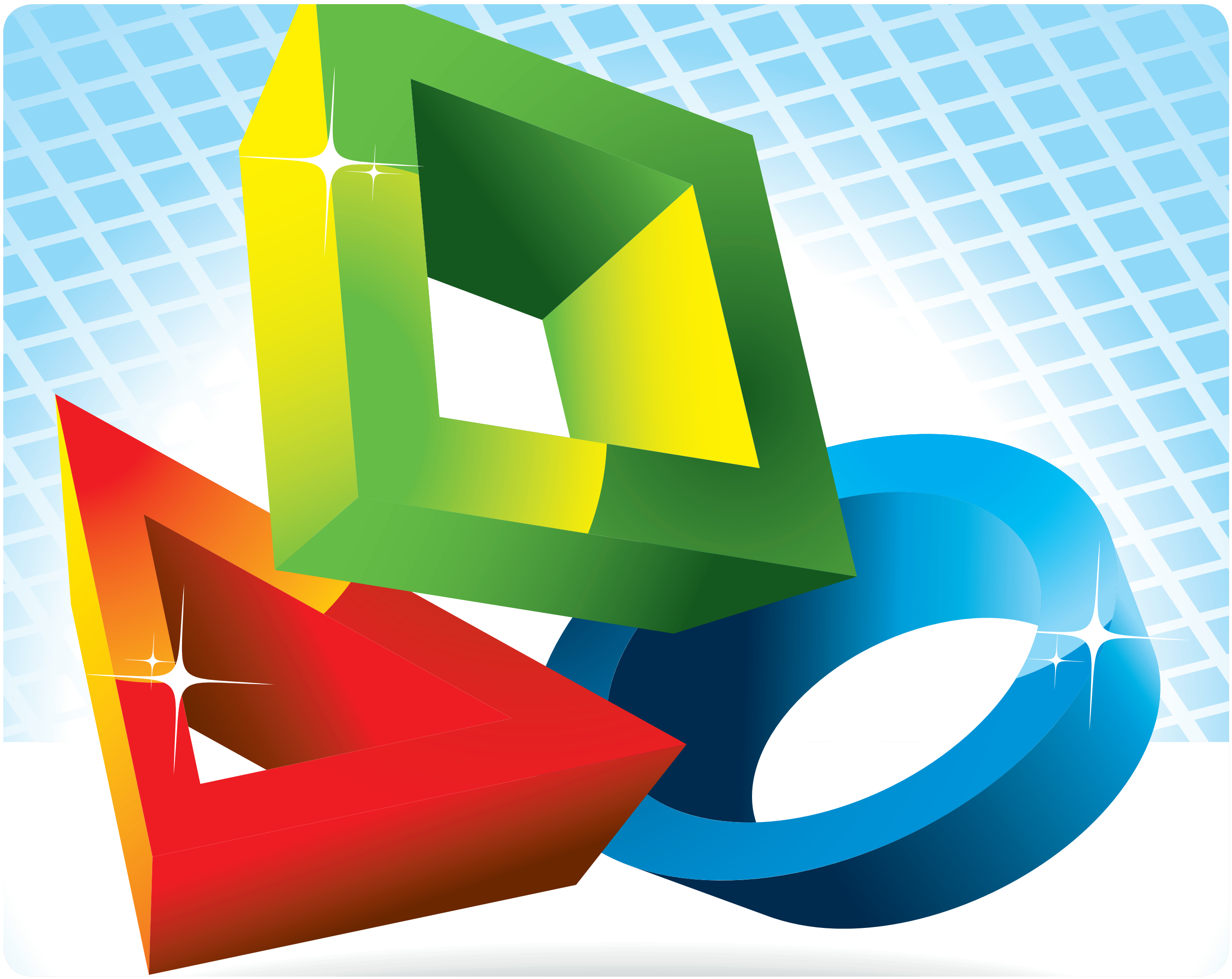
La secuencia de trabajo se desarrollará, en un inicio, activando los conocimientos previos geométricos, luego se incorporarán contenidos específicos relacionados con perímetro y área de figuras geométricas. A continuación, se abordarán las semejanzas que existen entre las figuras planas, aprenderá a observarlas en su entorno y a trabajar con ellas, específicamente mediante el trabajo con los triángulos.

También revisaremos el vínculo que existe entre la geometría y expresiones del arte mediante las transformaciones isométricas tales como rotación, traslación y simetría. Para finalizar, estudiaremos cómo calcular el volumen de cuerpos geométricos y su utilidad para resolver problemas de la vida real.

Pedimos que fortalezca su compromiso con el aprendizaje, ya que aumentar sus habilidades depende en gran parte de usted mismo. Intente construir sus propios conocimientos utilizando sus experiencias y dejando atrás temores que le puedan impedir avanzar; pues, lo que aprenda le permitirá desempeñarse de mejor forma en el mundo actual.

Guía de trabajo Nº 1

Conceptos básicos de geometría



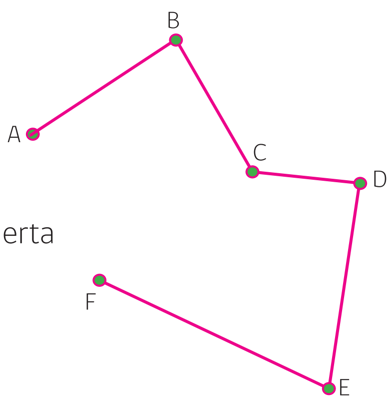
Contenidos

- **Nociones básicas de polígonos.**
- **Nociones geométricas de perímetro y área de figuras planas.**

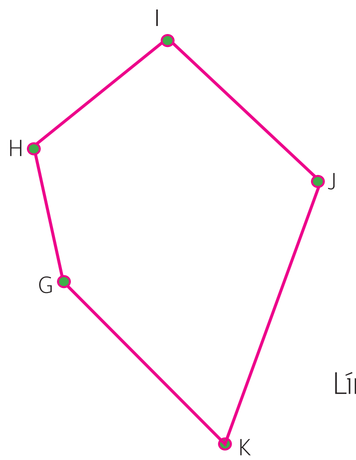
LÍNEA POLIGONAL

Uno de los oficios más conocidos es la carpintería, los carpinteros utilizan como herramienta el metro, que está formado por segmentos de madera que se pliegan con facilidad. Este instrumento, así plegado tiene forma de línea poligonal.

Una **línea poligonal** es una sucesión de segmentos rectos que se intersectan en sus extremos. Solo el extremo inicial del primer segmento y el extremo final del último segmento pueden no intersectarse entre ellos. En este caso se dice que la poligonal es abierta, en caso contrario, la poligonal es cerrada.



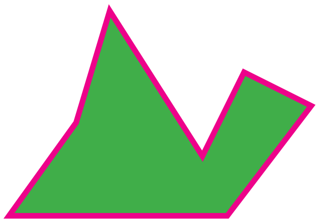
Línea poligonal abierta



Línea poligonal cerrada

POLÍGONO

Es la unión de una **línea poligonal cerrada** con la **región del plano interior** que esta limita.



Ejemplos:
En nuestro entorno observamos a diario diversos polígonos.

ELEMENTOS DE UN POLĪGONO

Los elementos de un polīgono son: lados, vértices, ángulos interiores, diagonales, etc.

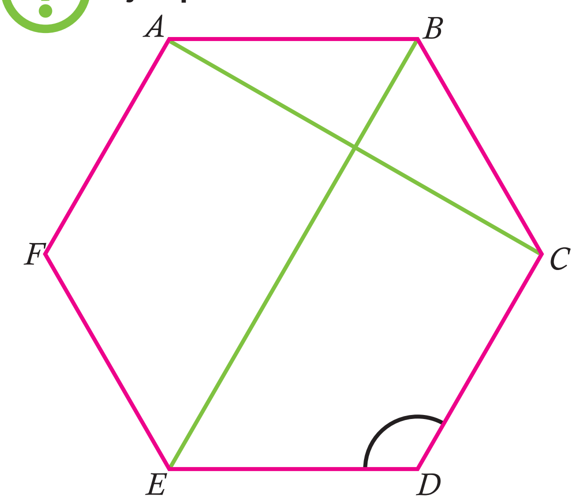
Los **lados** son los segmentos que limitan el polīgono.

Los **vértices** son los puntos donde se intersectan los lados.

Cada uno de los **ángulos interiores de un polīgono**, delimita una porción de su región interior como muestra el ángulo ∢ EDC en la figura.

Las **diagonales** son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

Ejemplo:



En el polīgono:

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FA}$ son sus lados.

Los puntos A, B, C, D, E y F son sus vértices.

∢ EDC es uno de sus ángulos interiores.

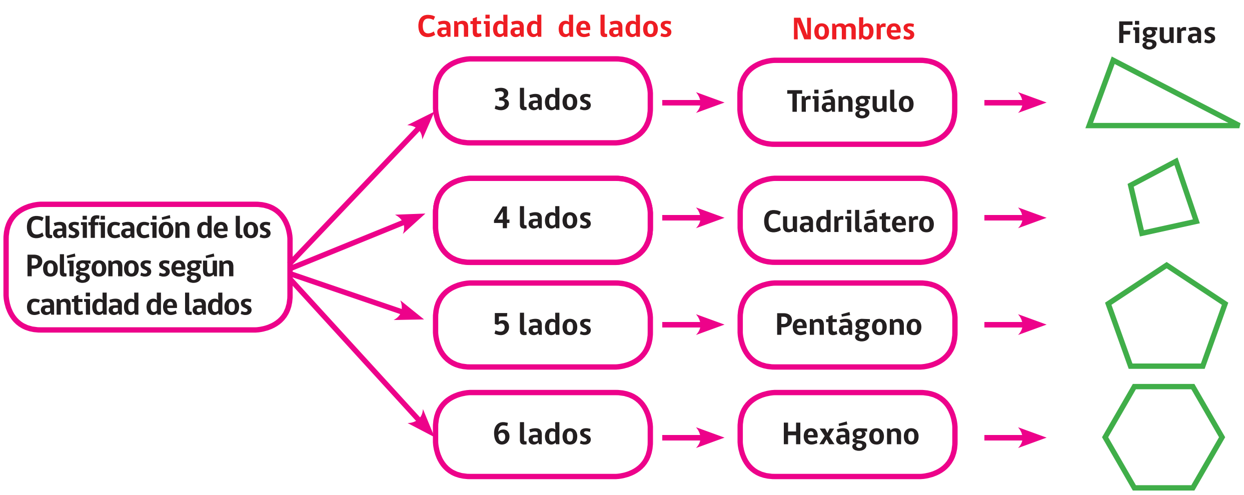
El segmento $\overline{AC}$ es una de sus diagonales.
El segmento $\overline{BE}$ es otra de sus diagonales

ACTIVIDAD **Dibuje todas las diagonales del polīgono de la figura anterior con distintos colores y marque todos los ángulos interiores. ¿Cuántas diagonales tiene este polīgono?**

CLASIFICACIÓN DE POLĪGONOS

Los polīgonos se clasifican según la **cantidad de lados** y según la **medida de sus lados y de sus ángulos.**

1) Clasificación de polīgonos según cantidad de lados



ACTIVIDAD **Realice sugún lo indicado**

1) En la siguiente imagen identifique 10 polígonos y clasifíquelos según su cantidad de lados:

2) Clasificación de polígonos según la medida de los lados

Clasificación de los polígonos según la medida de sus lados y de sus ángulos

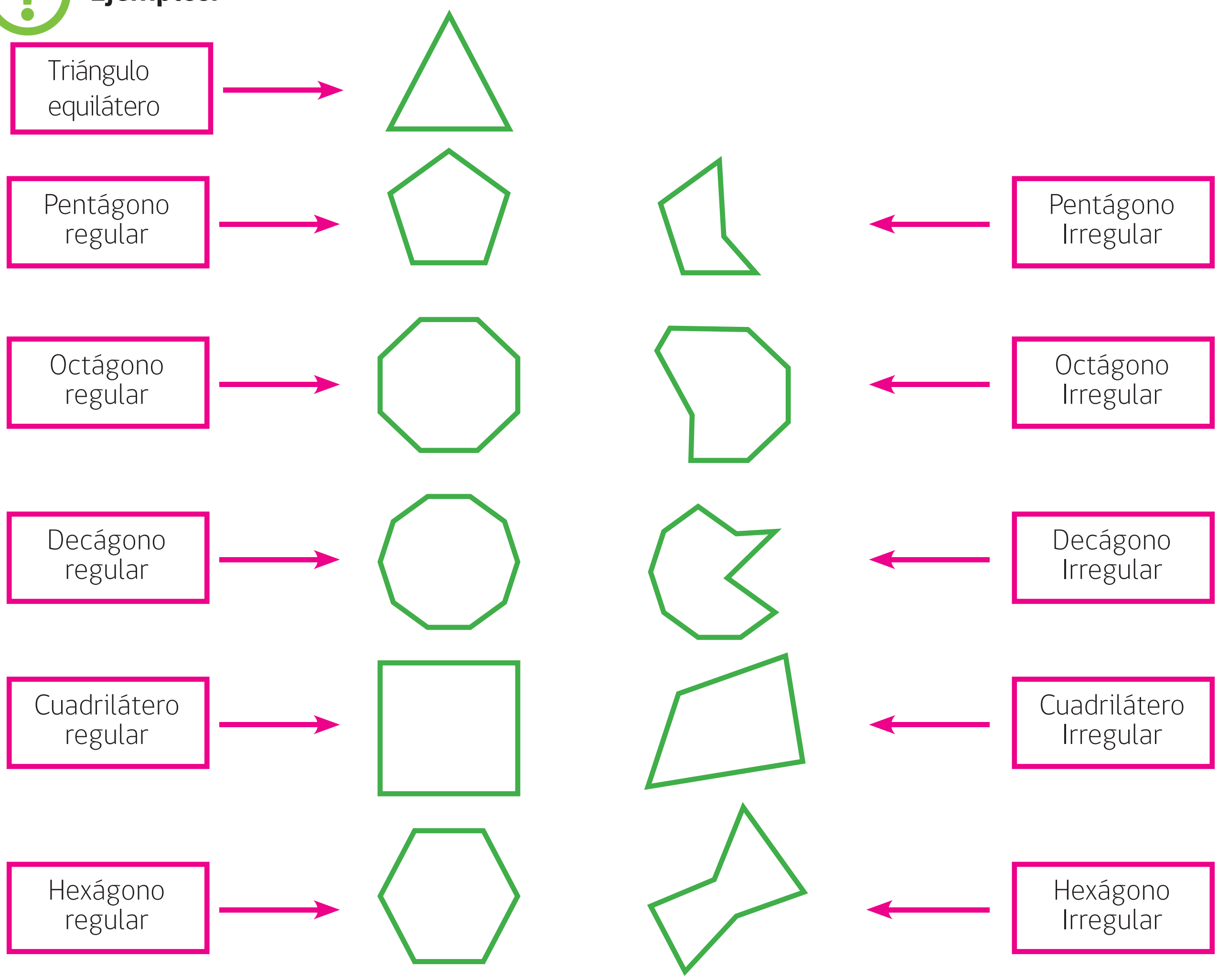
Polígono Regular

Todos sus lados y también todos sus ángulos tienen igual medida

Polígono Irregular

Al menos un lado o un ángulo mide distinto al resto

Ejemplos:

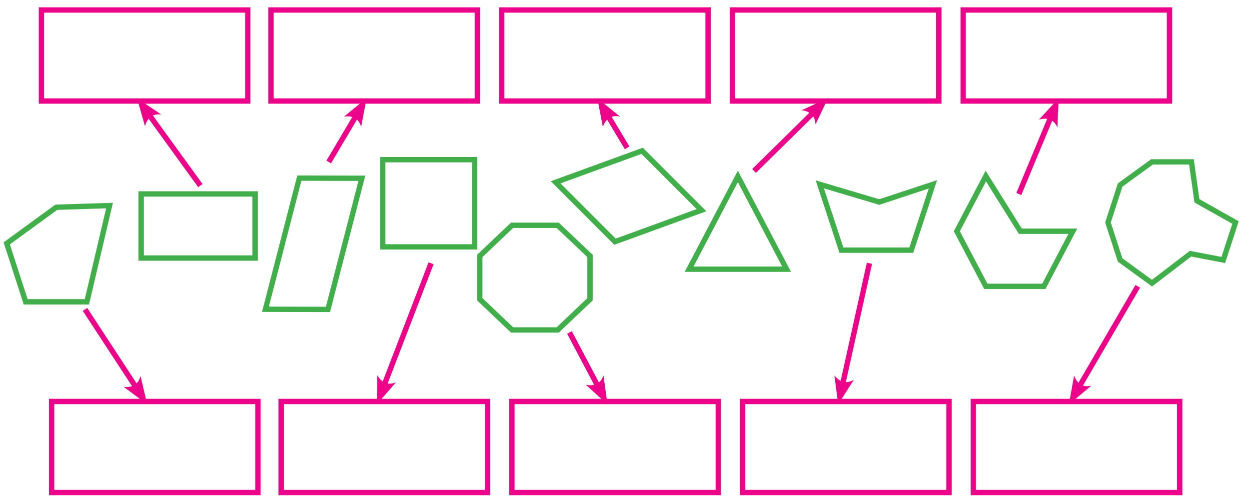


Actividad en el cuaderno

Investigue:

1. El significado de los sufijos: Penta - Octó - Deca - Hexa - Hepta.
2. La clasificación de los triángulos según sus lados y también según sus ángulos.

ACTIVIDAD **Clasifique los siguientes polígonos según la cantidad de sus lados:**

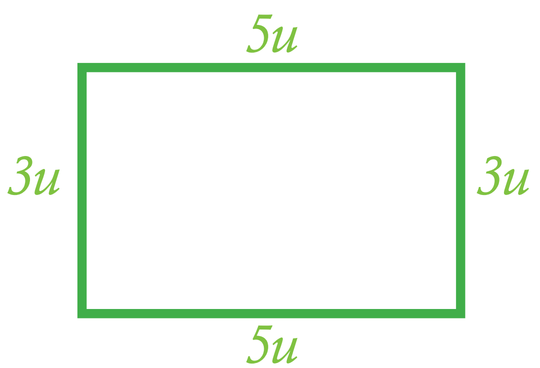


PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

El perímetro es la medida del **contorno** de una superficie o de una figura y se expresa en unidades de longitud, por ejemplo: centímetros (cm), metros (m), kilómetros (km), etc.
Para calcular el perímetro de un polígono debemos sumar las medidas de sus lados.

Ejemplos:

Si calculamos el perímetro de un rectángulo de largo $5u$ y ancho $3u$, sumamos la medida de sus lados. Por lo tanto su perímetro es $16u$.

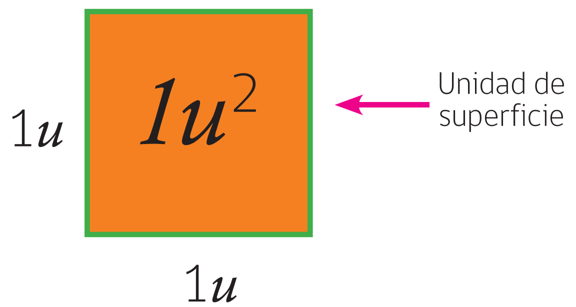


$P = 5u + 5u + 3u + 3u$
$P = 16u$

ÁREA DE UN POLÍGONO

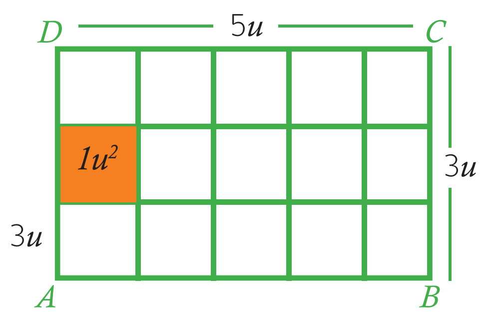
El área de una figura es la medida de su superficie y se expresa en unidades de área, por ejemplo: metros cuadrados (m^2), centímetros cuadrados (cm^2) , kilómetros cuadrados (km^2), etc.

Para calcular el **área** de una superficie debemos compararla con otra que elegimos como **superficie unidad,** y averiguar el número de unidades que contiene, es decir calcular el área de un cuadrado significa determinar cuántos cuadraditos de lado 1 unidad cubren la superficie.



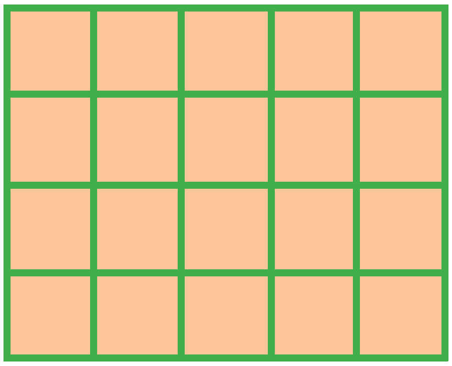
Ejemplo:

Si calculamos el área de un rectángulo de largo 5 u y de ancho 3 u, vemos que en él se pueden dibujar 15 cuadraditos de lado 1 u. Por lo tanto su área es 15 u^2.

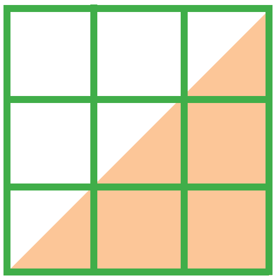


ACTIVIDAD **En las figuras, cada cuadrado tiene lado de medida 1 unidad (u) y área de medida $1u^2$ Conteste las preguntas:**

a) ¿Cuánto mide el área del cuadrilátero?

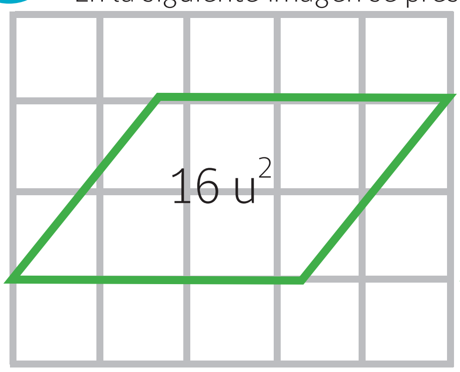


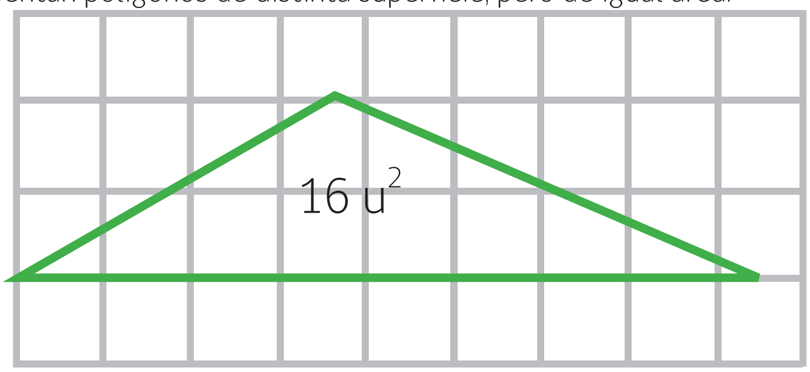
b) ¿Cuánto mide el área del triángulo?



TIPS

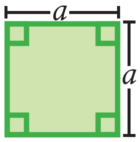
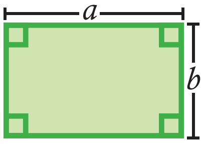
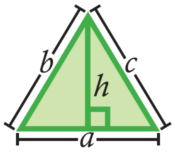
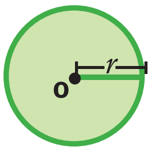
En la siguiente imagen se presentan polígonos de distinta superficie, pero de igual área:





Las superficies tienen distintas formas pero el área, que es la medida de la superficie, es la misma 16 u^2

FORMULAS MATEMÁTICAS PARA CALCULAR ÁREAS Y PERÍMETROS

Figura Geométrica	Perímetro (P)	Área (A)
 cuadrado de lado a	$a + a + a + a = 4a$	$a \cdot a = a^2$
 rectángulo de lados a y b	$a + a + b + b = 2a + 2b$	$a \cdot b$
 Triángulo de lados a, b, c y altura h	$a + b + c$	$\dfrac{a \cdot h}{2}$
 Circunferencia y Círculo de radio r	$2\pi r$	πr^2

TIPS

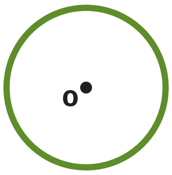
El número Pi (π) es la constante que relaciona la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Este número tiene infinitas cifras decimales, utilizaremos la aproximación.

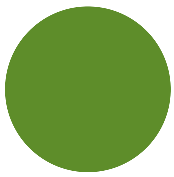
$$\pi = 3{,}14$$

TIPS

Circunferencia: Línea curva y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia de un punto llamado centro.



Círculo: Región del plano delimitado por una circunferencia.



Ejemplos:

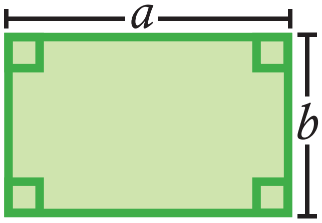
1) Calcularemos el área y perímetro de un rectángulo de 21 cm de ancho y 54 cm de largo.

Solución:

Perímetro:

El perímetro de un rectángulo es:

$P = a + a + b + b = 2a + 2b$



En este caso a = 21 cm y b = 54 cm

Y reemplazamos en cualquiera de las dos fórmulas:

FORMA 1

P = $2a + 2b$

P = 2 • 21 cm + 2 • 54 cm

P = 42 cm + 108 cm

P = 150 cm

FORMA 2

P = $a + a + b + b$

P = 21 cm + 21 cm + 54 cm + 54 cm

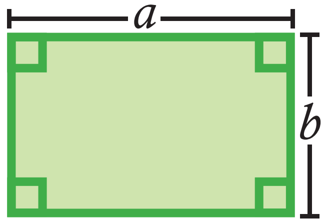
P = 150 cm

Respuesta: El perímetro del rectángulo es de 150 cm

Área:

El área de un rectángulo es:

A = $a \bullet b$



En este caso a = 21 cm y b = 54 cm

Y reemplazamos en la expresión:

A= $a \bullet b$

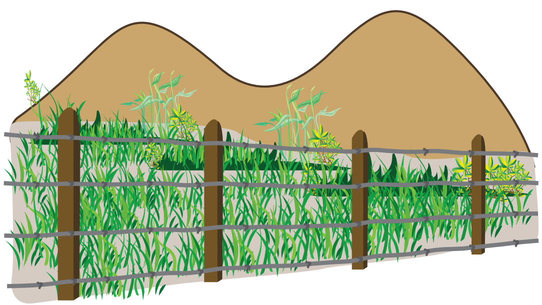
A= 21 cm • 54 cm

A= 1.134 cm^2

Respuesta: El área del rectángulo es de 1.134 cm^2

2) Don Luis tiene un terreno cuadrado 40 m de lado, cercado con 4 vueltas de alambre. Para sembrar decide ampliar su terreno a un rectángulo, manteniendo la medida de un par de lados opuestos y duplicando la medida del otro par de lados. Si Don Luis reutiliza el alambre de su terreno cuadrado en la cerca del nuevo terrenorectangular.

a) ¿Cuántos metros de alambre le faltarán para poder dar la misma cantidad de vueltas al nuevo terreno?



Respuesta a don Luis le faltan 320 m de alambre

Procedimiento

Calcularemos el **perímetro** del terreno cuadrado:

40 • 4 = 160 m

Al dar 4 vueltas, la medida del alambre con que se cuenta es → 160 • 4 = 640 m

El **perímetro** del terreno ampliado es → 40 • 2 + 80 • 2 =240 m

El alambre debe dar 4 vueltas, entonces la medida del alambre debe ser → 240 • 4 = 960 m

Se requieren 960 m, pero ya se cuenta con 640 m

Entonces faltan → 960 – 640 =320 m

b) **¿Cuánta área adicional dispondrá para su siembra?**

Procedimiento

Calcularemos el **área del terreno cuadrado:**
$40 \bullet 40$ m = 1600 m^2
Caculamos el área del terreno adicional restando el área del rectángulo:
3200 m^2 - 1600 m^2 = 1600 m^2

Respuesta
Don Luis dispondrá de 1600 m^2 adicionales para su siembra.

3) Si el lado de un cuadrado aumenta en un 50%, **¿en qué porcentaje aumenta su area?**

Procedimiento

Llamemos ℓ a la medida del lado del cuadrado
El área del cuadrado de lado ℓ es $\rightarrow A_1 = \ell^2$

Al aumentar el lado del cuadrado en un 50 %, el nuevo lado mide $\rightarrow \ell + \frac{50}{100}\ell = \frac{150}{100}\ell$

El área del cuadrado de lado $\frac{150}{100}\ell$ es $\rightarrow A_2 = \left(\frac{150}{100}\ell\right)^2$

$$= \left(\frac{15}{10}\ell\right)^2$$

$$= \frac{225}{100}\ell^2$$

Comparando A_1 con A_2 tenemos que lo que ha aumentado su área es

$$A_2 - A_1 = \frac{225}{100}\ell^2 - \ell^2$$

$$= \frac{125}{100}\ell^2 = \frac{5}{4}\ell^2 = 1{,}25\ell^2$$

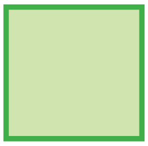
Respuesta
El porcentaje de aumento de área es de un 125 %

ACTIVIDAD **Escriba en cada figura geométrica la medida de las dimensiones dadas. Luego determine el área y perímetro.**

a) Un rectángulo de 10 cm de ancho y 20 cm de largo

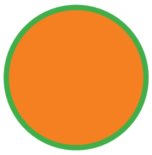
Perímetro:	Área:

b) Un cuadrado de lado 8 m



Perímetro:	Área:

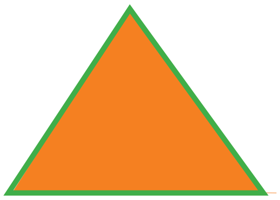
c) Perímetro de una circunferencia de radio 10 cm y área de un círculo de radio 10 cm.



Perímetro:	Área:

d) Un triángulo isósceles de base 6 m, lados 5 m y de altura 4 m

TIPS Un triángulo es isósceles cuando dos de sus lados miden lo mismo. El lado distinto se llama base.



Perímetro:	Área:

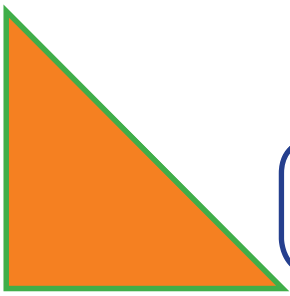
e) Un rectángulo de lados 2,5 m y 120 cm

TIPS Transforme una de las unidades de medida.

Perímetro:	Área:

f) Un triángulo rectángulo de catetos 6 m y 800 cm y de hipotenusa 10 m

TIPS Un triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos interiores recto (mide 90º).Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el otro lado hipotenusa.



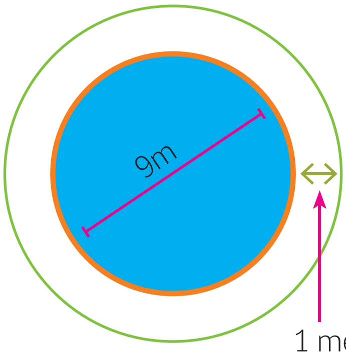
Perímetro:	Área:

Activadad en el cuaderno

Resuelva los siguientes problemas

1) El papá de Bernardo tiene un viñedo en un terreno rectangular de 800 m de ancho y 1.200 m de largo. **¿Cuántos rollos de 50 m. de malla se necesitarán para cercar el terreno?**

2) El municipio de la comuna donde vive Marcela quiere inaugurar un centro recreacional con juegos y una piscina de forma circular de 9 m de diámetro. Por seguridad se quiere colocar una reja a un metro de distancia alrededor del borde de la piscina como se muestra en la imagen. **¿Cuántos metros de reja se necesitan?**



3) Se desea confeccionar cortinas para una ventana rectangular que mide 1,8 m de ancho por 1,3 m de alto, de tal manera de dejar 20 cm más a todos los lados de la ventana, para la cenefa y para cubrir completamente la ventana. **¿Cuántos metros cuadrados de género se deben comprar para hacer las cortinas?**

4) Se quiere embaldosar una superficie rectangular de 2,5 m de ancho por 3,2 m de largo con baldosas cuadradas de 20 cm de lado:

a) ¿Cuántas baldosas se necesitan?
b) Si se utilizan baldosas de 33 cm de lado, **¿cuántas se necesitan para cubrir la misma superficie?**

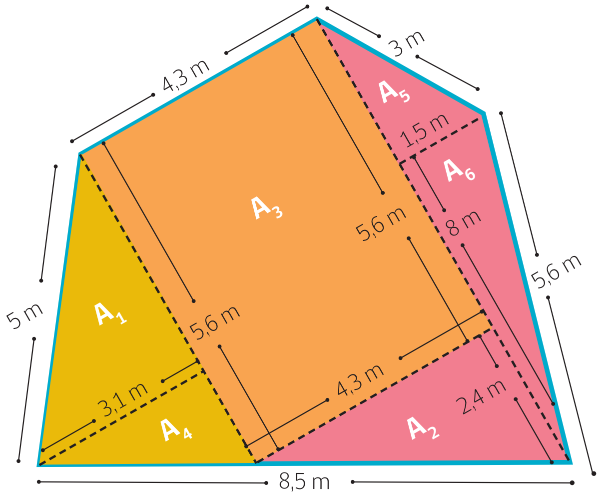
5) Se quiere cercar una parcela rectangular de 850 m de largo y 550 m de ancho con 3 corridas de alambre, **¿cuántos metros de alambre se necesitan?**

6) Un local de pizzas ofrecía tradicionalmente sus pizzas de tamaño familiar, de 40 cm de diámetro, en \$ 8.000. Ahora, ofrece por el mismo precio, una pizza con 8 cm más de radio:

a) ¿Cuál es el radio de la nueva pizza?
b) ¿Cuál es la diferencia de áreas entre las pizzas?

7) Las etiquetas de los envases de detergentes fabricados por una empresa, tienen forma cuadrada y miden 25 cm La empresa desea cambiar la forma de las etiquetas pero manteniendo el área. Sugiera formas que podrían tener las etiquetas e indique sus medidas en forma aproximada.

8) La siguiente ilustración es un plano que representa el terreno en el cual se construirá una casa.



a) ¿Cuánto mide el perímetro del terreno?

b) ¿Cuánto mide el área de cada superficie?

c) ¿Cuánto mide el área del terreno?

d) Si la casa construida ocupará toda la superficie A3, ¿cuál será el perímetro de su superficie ?.

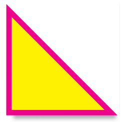
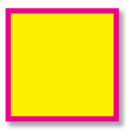
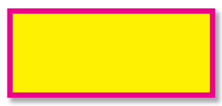
9) En una escuela han organizado una campaña de invierno para confeccionar frazadas a partir de cuadrados de lana de 20 cm por 20 cm. Si desean hacer frazadas que midan 2 m de largo y 1 m con 60 cm de ancho:

a) ¿Cuántos cuadrados de lana se necesitan para una frazada?

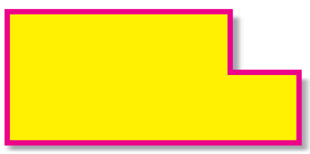
b) Si logran reunir 1.000 cuadrados de lana **¿cuántas frazadas se pueden confeccionar? ¿sobran cuadrados?, ¿cuántos?**

10) Un granjero desea hacer un corral para guardar sus animales, considerando que cuenta con 60 m de malla de alambre y que desea abarcar la mayor cantidad de terreno:

a) Determine si la cantidad de alambre le alcanza para todas las formas siguientes y encierre en un círculo la forma con la que abarcará más terreno. Justifique su respuesta.

Triángulo rectángulo de catetos 30 cm y 40 cm respectivamente	Cuadrado con lados de 15 m	Rectángulo de 10 m de ancho y de 20 m de largo
		

b) Averigüe si es posible sugerir medidas para los lados de la forma presentada en la figura, de modo que convenga más que las formas analizadas anteriormente:



11) El largo y el ancho de un rectángulo aumentan su medida en un 25% **¿en qué porcentaje aumenta su perímetro?**

12) En un terreno cuadrado la medida de su lado es 200 m Si el lado aumenta un 50%. **¿En qué porcentaje aumenta su área y ¿Cuánto es su incremento?**

Guía de trabajo Nº 2

Figuras Proporcionales

Contenidos

- Segmentos proporcionales
- Ampliación y reducción de escalas
- Semejanza de Triángulos
- Teorema de Thales y algunas aplicaciones de la vida cotidiana

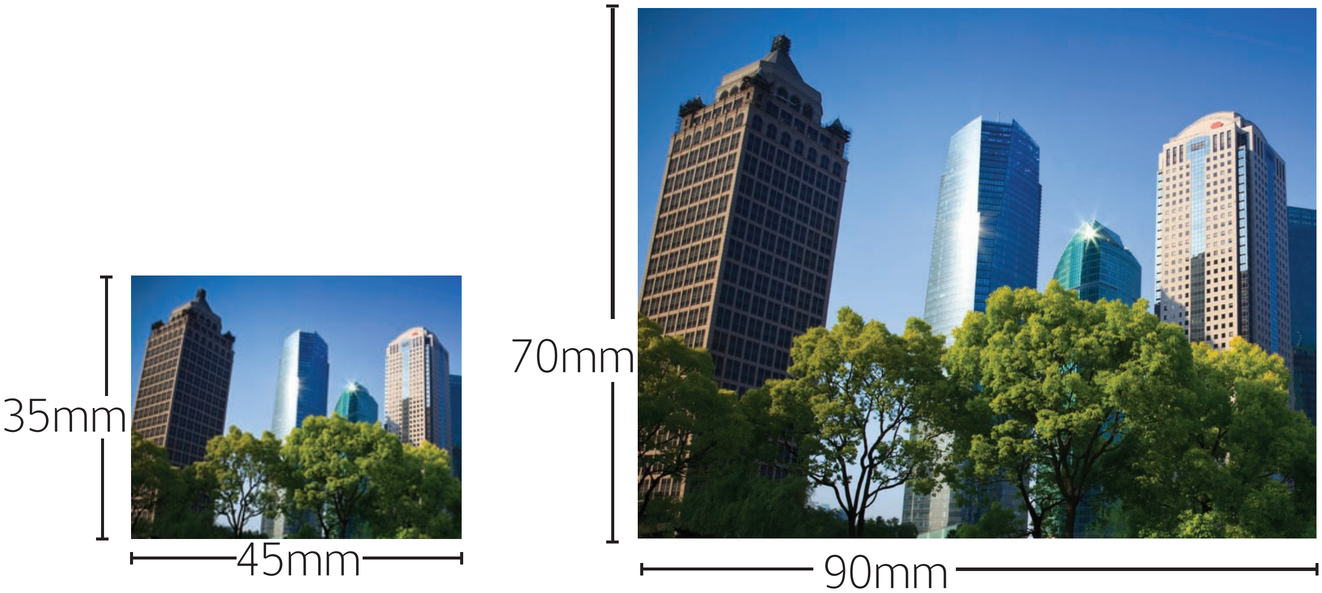
AMPLIACIÓN Y REDUCCIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Ampliación

Consiste en aumentar el tamaño de una figura conservando su forma.

Ejemplo:

Fernando ha ampliado una foto de sus últimas vacaciones en una tienda de fotografía.
Está observando ambas fotos y midiendo las dimensiones de las mismas.



Las dimensiones de la fotografía original son 35 mm de ancho y 45 mm de largo en la fotografía ampliada el ancho mide 70 mm y el largo 90 mm

Podemos ver que las medidas de los segmentos están en la siguiente relación:

$$\frac{\textit{largo fotografía ampliada}}{\textit{largo fotografía pequeña}} = \frac{90}{45} \textit{ simplificando tenemos} \rightarrow \frac{\cancel{90}}{\cancel{45}} = \frac{2}{1} = \mathbf{2 : 1} = 2$$

$$\frac{\textit{ancho fotografía ampliada}}{\textit{ancho fotografía pequeña}} = \frac{70}{35} \textit{ simplificando tenemos} \rightarrow \frac{\cancel{70}}{\cancel{35}} = \frac{2}{1} = \mathbf{2 : 1} = 2$$

El ejemplo precedente ha mostrado que los lados de los rectángulos que contienen las fotografias son proporcionales.

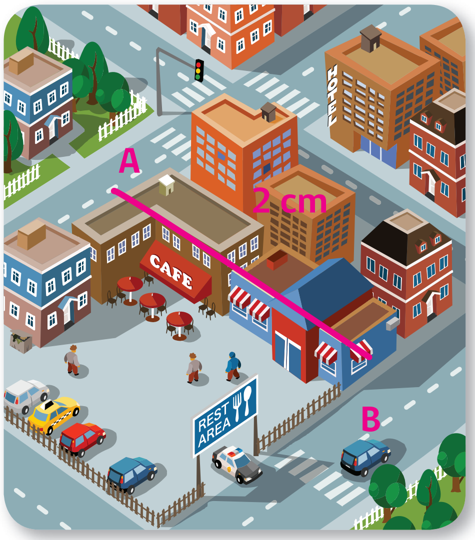
REDUCCIÓN:

Entre las distintas formas de representar la tierra están los mapas, que corresponden a una representación a escala de la superficie terrestre o de una parte de ella. Ante la imposibilidad de representarla en su tamaño real, recurrimos a una reducción.

La reducción consiste en disminuir el tamaño de una figura conservando su forma.

Ejemplo:

En un mapa, que está a una escala de 1 : 2.500, la distancia que existe entre la calle A y la calle B es de 4 cm.



La distancia real entre las dos calles la podemos determinar de la siguiente forma:

$$\frac{\textit{Medida en el mapa}}{\textit{Medida real}} = \frac{1}{2.500}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{2.500}$$

$$4 \bullet 2.500 = 1 \bullet x$$

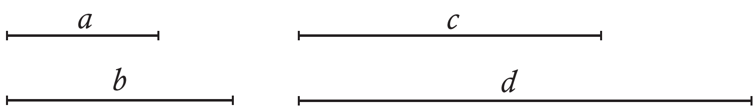
Despejamos la incógnita

$$10.000 = x$$

Respuesta: La distancia real entre las calles es de 10.000 cm o 100 m.

Segmentos Proporcionales, Escalas y Semejanza

Segmentos proporcionales



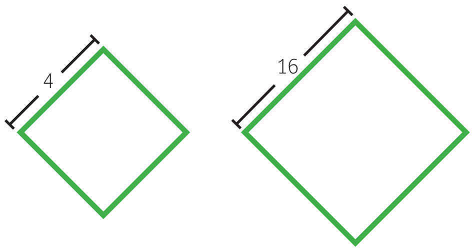
La igualdad establecida con los números a, b, c y d se llama **PROPORCION;** cada uno de los términos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ de la proporción se llama **RAZŌN.** El cociente de una razón se llama **VALOR DE LA RAZON.** El valor común de las razones de una proporción se llama **CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.**

Escala y razón de semejanza

En un plano o un mapa la escala es la razón entre la longitud del segmento que separa dos puntos en el plano o mapa y la distancia real entre esos dos puntos. La escala **1: k** significa que **1 cm** del del dibujo son **k cm** de la realidad. Entonces, una escala 1:100 indica que 1 cm en un plano representa 100 cm en la realidad. En mapas es usual que las escalas relacionen centímetros con kilómetros para abreviar la escritura de números.

Semejanza de figuras planas

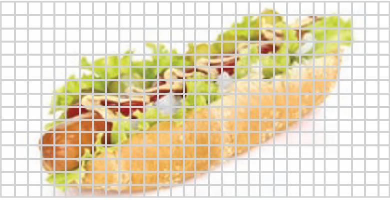
Dos figuras como las de la ilustración son semejantes si las medidas de todos sus lados homólogos son proporcionales y si las medidas de sus ángulos homólogos son iguales, esto es que los ángulos son congruentes.



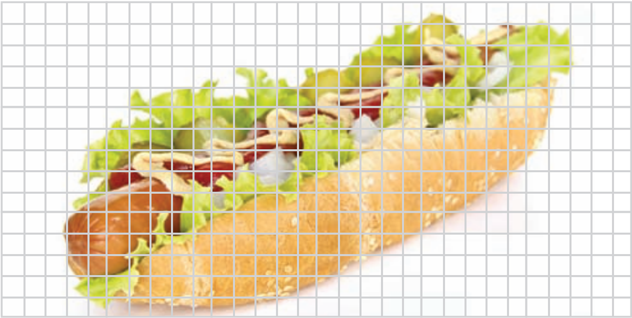
ACTIVIDAD **¿Cuál es la escala de ampliación del cuadrado de la figura precedente?**

ACTIVIDAD **Resuelva las siguientes situaciones y compare los resultados con sus compañeros.**

1) Para hacer publicidad a un local de comida rápida, se diseñó un completo en una hoja cuadriculada con cuadritos de 2 cm, que luego se copiará en un gran cartel cuadriculado, en el que cada cuadro mide 40 cm de lado.



BOSQUEJO



CARTEL

a) Complete la siguiente tabla con las medidas de los carteles:

TIPS

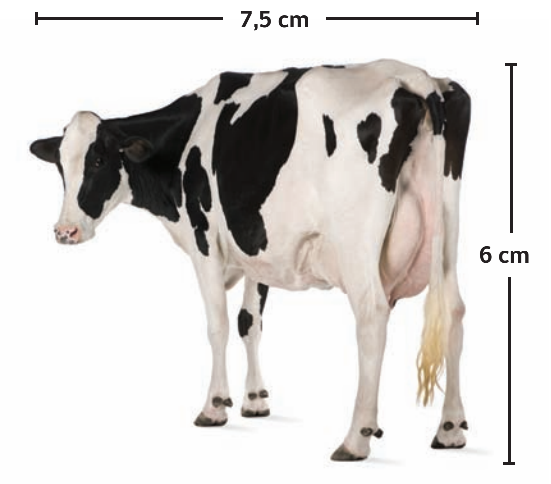
Para calcular el largo del bosquejo contamos el número de cuadritos que tiene a lo largo (24), este número lo multiplicamos por la medida del lado de cada cuadrito (2 cm)

$24 \cdot 2 = 48$ cm

El largo del bosquejo.	48 cm
El ancho del bosquejo.	
El largo del cartel.	
El ancho del cartel.	

b) El bosquejo y el cartel **¿Son figuras semejantes?** (Si crees que sí, indica la escala y razón de semejanza en la que se encuentran).

2) La siguiente fotografía de una **vaca** está en la razón 1:25



a) ¿Cuál es la altura real de la vaca?

b) ¿Cuál es la longitud real de la vaca?

3) La fotografía de una bacteria está a escala 25.000:1.
Si la longitud de la bacteria en la foto es de 4,5 cm, **¿cuál es el tamaño real de la bacteria en milímetros?**

4) La siguiente figura muestra el plano de una casa a escala 1:100.

a) Mida el plano en centímetros utilizando una regla y determine el largo y ancho real de cada pieza.

Living ....

....

Cocina ....

....

Baño ....

....

Dormitorio 1 ....

....

Dormitorio 2 ....

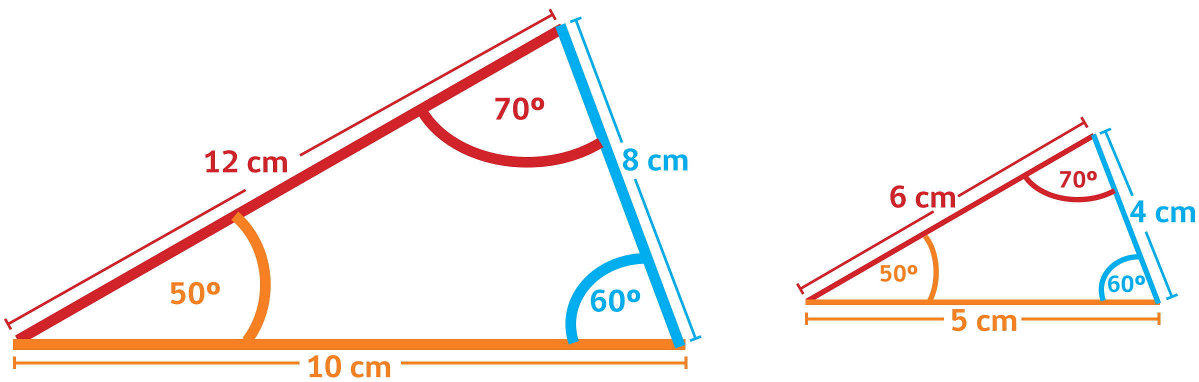
....

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados homólogos proporcionales y si tienen congruentes sus ángulos homólogos, esto es de igual medida. Por supuesto que dos triágulos son semejantes si uno de ellos es la ampliación o reducción del otro.

Ejemplo:

De acuerdo a los datos, los triángulos representados en las figuras son semejantes.



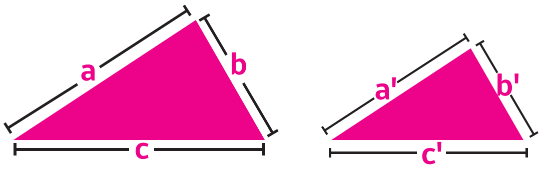
TIPS

Congruentes, en el caso de dos o más polígonos, significa que tienen exactamente la misma forma y tamaño; en el caso de dos o más ángulos significa que tienen igual medida.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para determinar si dos triángulos son semejantes no es necesario comprobar la proporcionalidad de los lados correspondiente ni la congruencia de todos los ángulos correspondientes. Basta con comprobar uno de los siguientes criterios de semejanza:

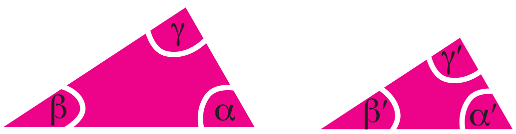
Criterio de semejanza Lado-Lado- Lado (LLL)



Dos triángulos son semejantes si al considerar uno de ellos, tiene sus tres lados proporcionales a sus lados homólogos en el otro triángulo.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

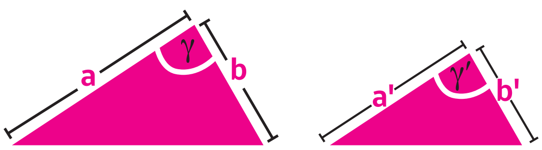
Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (AA)



Dos triángulos son semejantes si al considerar dos ángulos cualesquiera de un triágulo, estos respectivamente igual en medida que sus ángulos homólogos del otro triángulo, es decir:

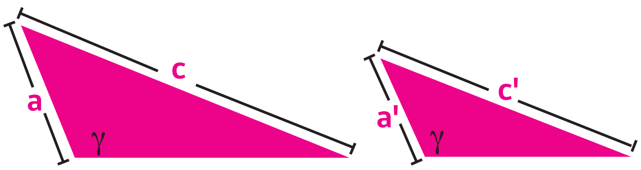
$\alpha=\alpha'$ y $\beta=\beta'$; o bien: $\alpha=\alpha'$ y $\gamma=\gamma'$; o bien: $\beta=\beta'$ y $\gamma=\gamma'$

Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado (LAL)



Dos triángulos son semejantes si al considerar dos lados de unos de los triángulos estos son proporcionales a los lados homólogos del otro triánguloy si, además, el ángulo comprendido entre los lados considerados en el primer triángulo, es igual en medida que su homólogo en el otro triángulo. Por ejemplo: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y $\gamma = \gamma'$

Criterio de semejanza Lado-Lado-Ángulo Mayor (LLA)

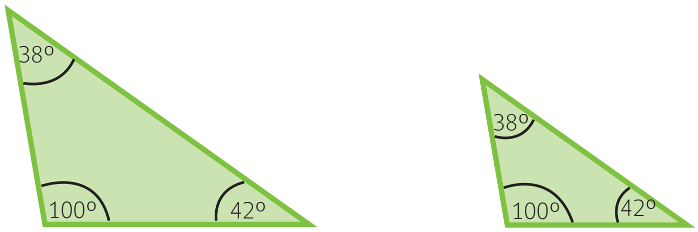


Dos triángulos son semejantes si al considerar uno de ellos, dos de sus lados son proporcionales a sus homólogos del otro triángulo y si, además, el ángulo que se opone al mayor de los lados, tiene igual medida que su homólogo del otro triángulo. Por ejemplo: $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ $\gamma = \gamma'$

Ejemplo:

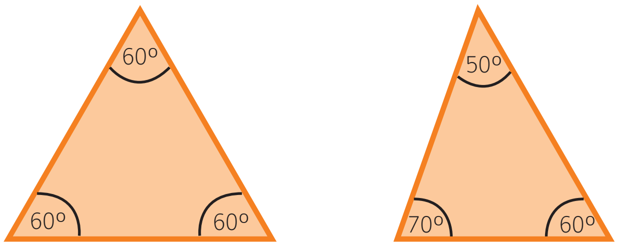
1) Veremos si los siguientes triángulos son semejantes, usando los criterios señalados:

a) Observe los siguientes triángulos:



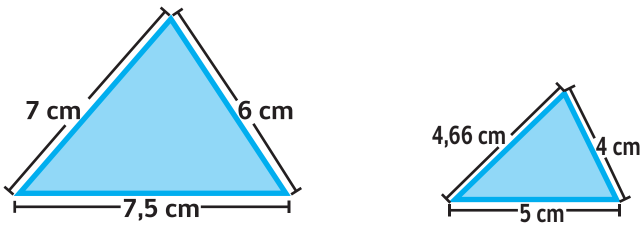
Como al considerar dos ángulos cualesquiera de uno de los triángulos, estos son respectivamente iguales que sus ángulos homólogos del otro triángulo, por el criterio **Ángulo – Ángulo (AA),** podemos afirmar que estos triángulos son semejantes.

b) Observe los siguientes triángulos:



En este caso, ninguna pareja de ángulos del triángulo izquierdo tiene igual medida que sus ángulos homólogos en el triángulo derecho, entonces, por el criterio **Ángulo – Ángulo (AA),** estos triángulos no son semejantes.

c) Observe los siguientes triángulos:

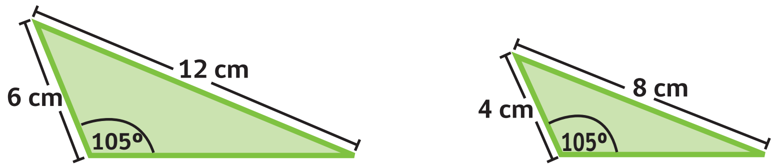


Los datos en los triángulos, sugieren la aplicación del criterio **Lado – Lado – Lado (LLL),** entonces veremos si las medidas de los ladoshomólogos son proporcionales.

$$\frac{7,5}{5} = 1,5 \qquad \frac{7}{4,66} = 1,5 \qquad \frac{6}{4} = 1,5$$

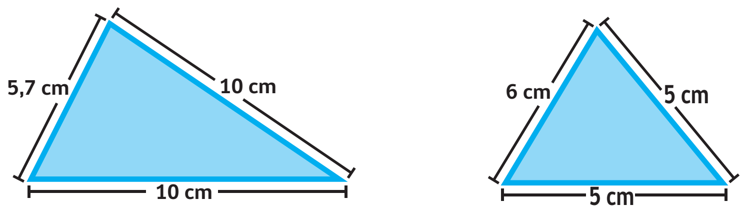
Como en todas las divisiones obtuvimos el mismo resultado, los tres lados del primer triángulo son proporcionales y a sus homólogos del segundo triángulo,entonces, porel criterio **Lado – Lado – Lado (LLL),** afirmamos que los triángulos son semejantes.

d) Observe los siguientes triángulos:



Los datos en los triángulos sugieren la aplicación del criterio **Lado – Lado – Ángulo Mayor (LLA).** Hacemos la división de los trazos correspondientes $\frac{6}{4}$ = 1,5 y $\frac{12}{8}$ = 1,5 obteniendo el mismo resultado. Además, observamos que los ángulos opuestos al lado mayor, en ambos triángulos, miden lo mismo; por lo tanto, según el criterio **LLA,** afirmamos que los triángulos son semejantes.

e) Observe los siguientes triángulos:

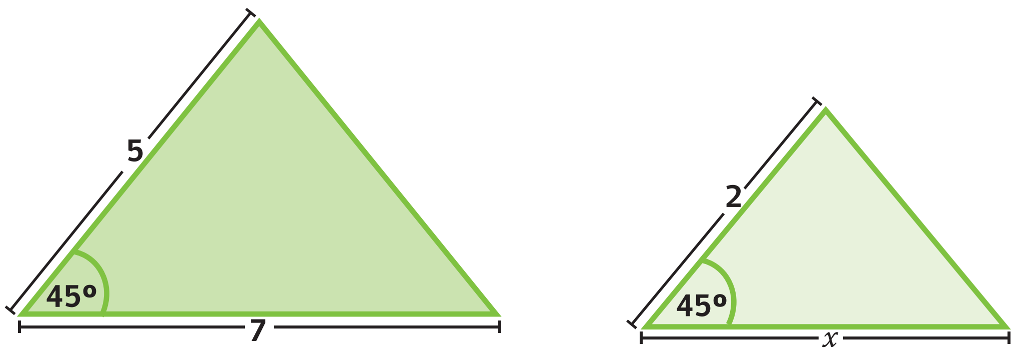


De acuerdo al criterio **Lado – Lado – Lado (LLL),** las medidas de los lados homólogos no son proporcionales, en efecto:

$$\frac{5}{6} = 0{,}83 \qquad \frac{10}{5} = 2 \qquad \frac{10}{5} = 2$$

Como no se ha obtenido el mismo resultado en todas las divisiones, entonces, por el criterio **Lado – Lado – Lado (LLL)** afirmamos que los triángulos no son semejentes.

2) Con relación a los triángulos de la figura, calcularemos el lado de medida x para que los triángulos sean semejantes de acuerdo al criterio LAL.



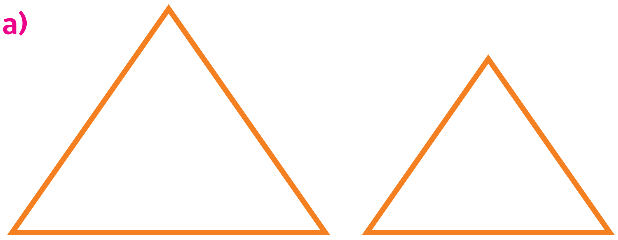
a) Los lados homólogos deben ser proporcionales, es decir:

$$\frac{5}{2} = \frac{7}{x} \quad \textit{Luego } x = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

ACTIVIDAD Resuelva los siguientes ejercicios:

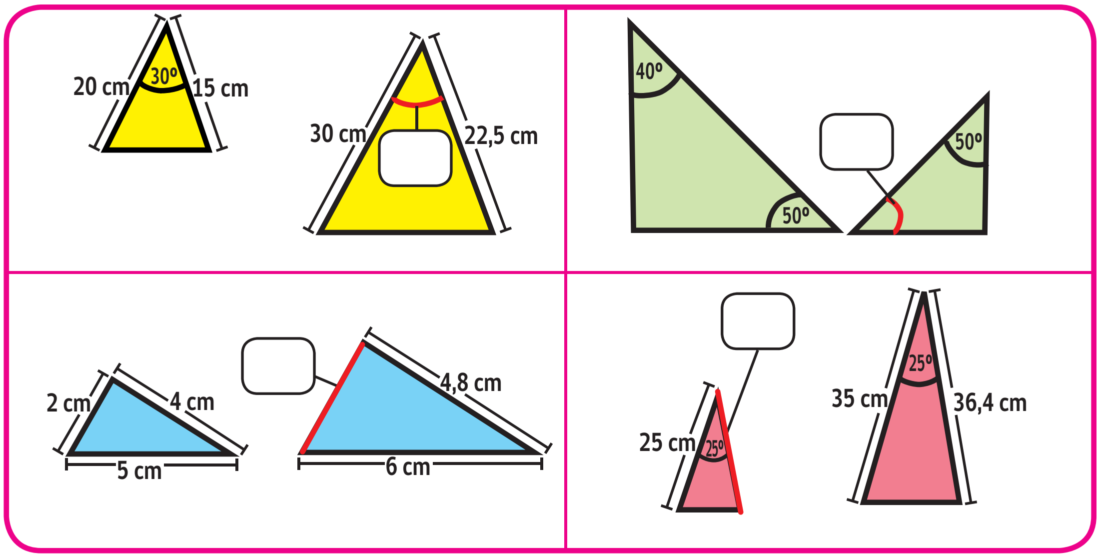
1) Determine si los siguientes triángulos son semejantes y escriba el criterio que utilizó para deducirlo.

a)

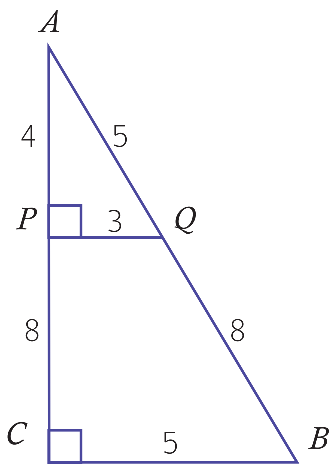


b)

2) Determine la medida que falta en los siguientes triángulos para que sean semejantes:



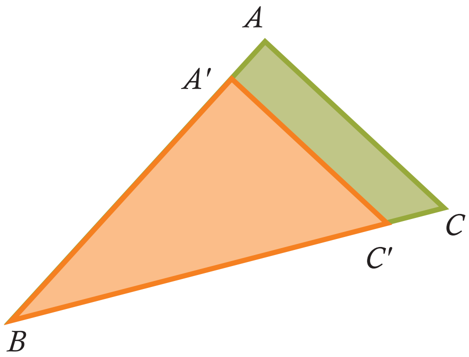
3) Observe la siguiente figura y señale si los triángulos APQ y ACB son semejantes.



Justifique su respuesta

TEOREMA DE THALES

El teorema de Thales dice que toda recta paralela a un lado de un triángulo que corta a los otros dos lados, determina otro triángulo semejante al triángulo inicial.



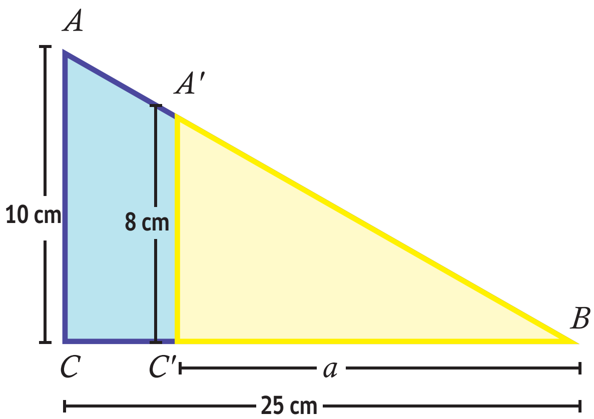
En el triángulo ABC se traza una paralela al lado AC, formando el triángulo $A`B\,C`$. En estos triángulos se pueden establecer las siguientes relaciones entre sus lados:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}}$$

TIPS

Thales de Mileto, filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VI a. C.
El teorema de Thales, llamado así en su memoria, es una parte fundamental en el estudio de la semejanza de triángulos.

Ejemplo:



Considerando los datos que tenemos en este problema, podemos determinar la medida de $\overline{C'B}$ utilizando la siguiente igualdad dada por el teorema de Thales:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC'}}$$

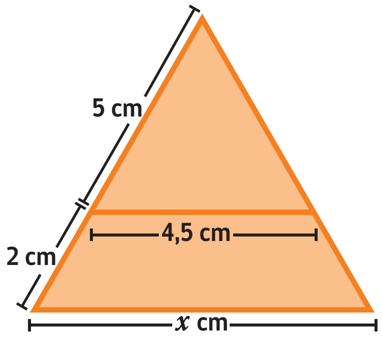
$$\frac{10}{8} = \frac{25}{a}$$

$$a = 20\,cm$$

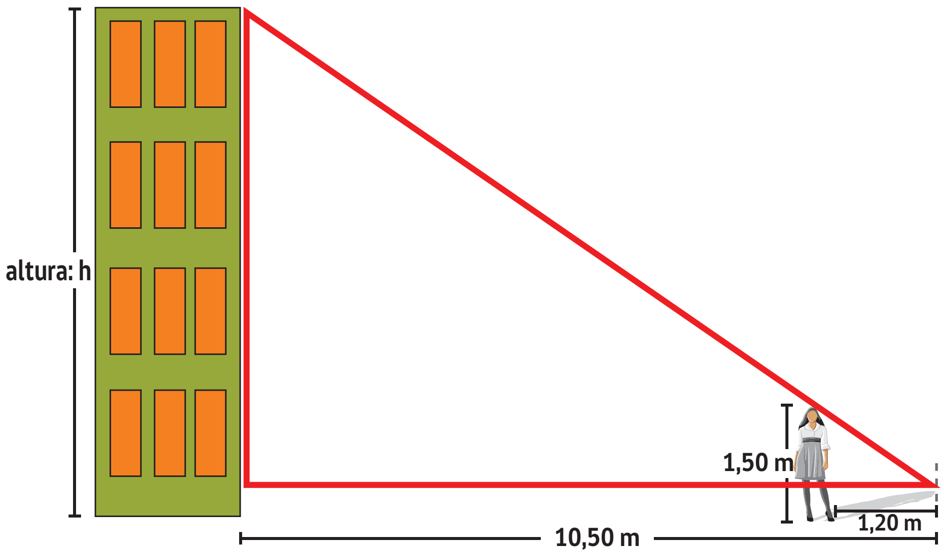
Actividad en el cuaderno

Resuelva los siguientes problemas:

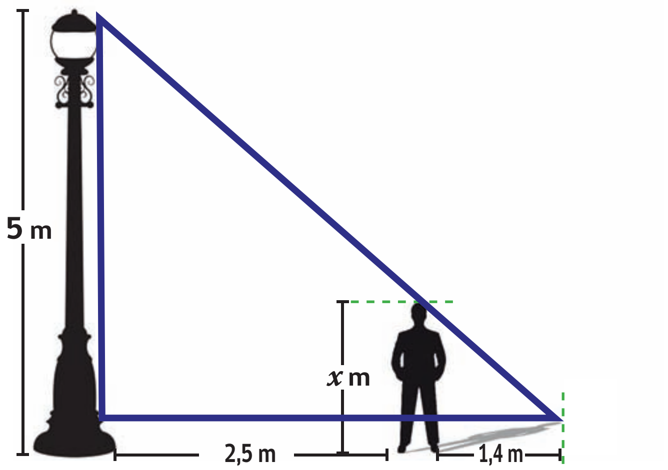
1) Con los datos de la figura, calcule el valor **x** de la base del triángulo.



2) En un momento dado, la sombra de Soledad mide 1,2 m Si Soledad mide 1,5 m, **¿cuánto medirá un edificio cuya sombra, a la misma hora mide 10,50 m?**

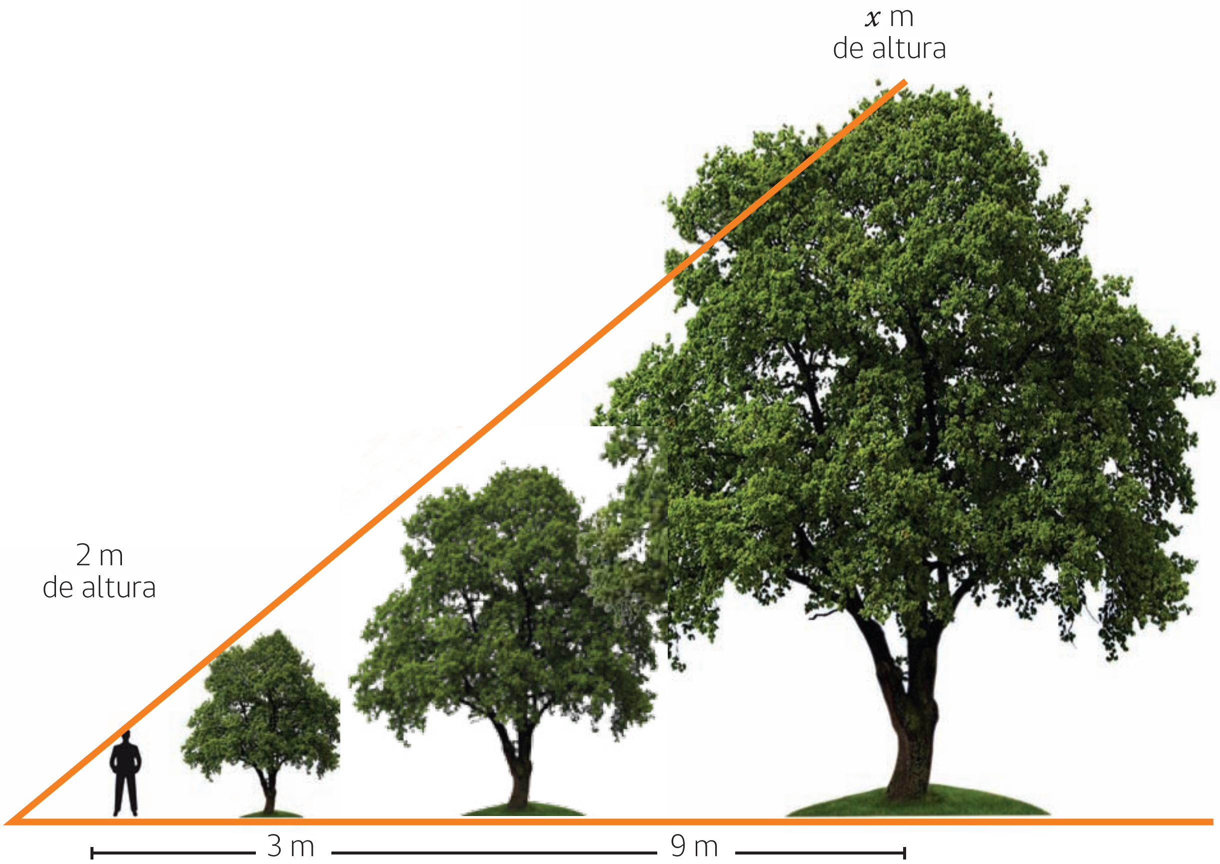


3) A 2,5 m del pie de un poste de alumbrado se sitúa el portero del colegio de Carmen. Ella le dice: «No se mueva, que voy a averiguar cuánto mide sabiendo que su sombra mide 1,4 m y la altura del poste es de 5 m». **¿Cuánto mide el portero del colegio?**

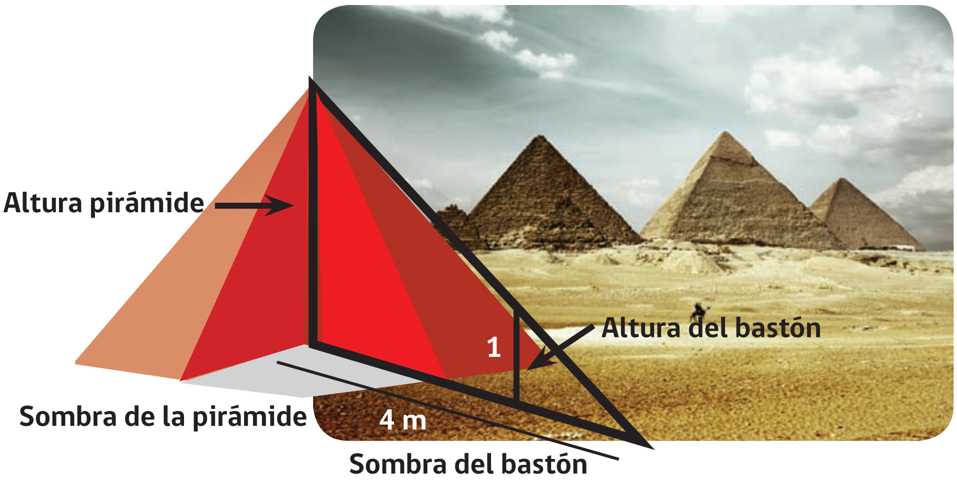


Actividad en el cuaderno

4) Tres árboles se encuentran alineados como se muestra en la figura. El más pequeño mide 2 m y el mediano 4 m, si la distancia entre cada par de árboles es de 3 m, **¿cuánto mide el árbol más alto?**



5) Thales calculó la altura de una gran pirámide de Egipto sin medirla de manera directa, lo hizo basándose en la longitud de la sombra de su bastón. Al igual que Thales, calcule usted de manera aproximada la altura de la pirámide, suponiendo que se aleja 4 m de ella, desde la posición del bastón hasta el vértice del triángulo que señala el extremo de su sombra.



Guía de trabajo Nº 3

Transformaciones isométricas y teselaciones en el plano cartesiano

Contenidos

- **Traslaciones**
- **Simetrías axiales**
- **Rotaciones**
- **Teselaciones**

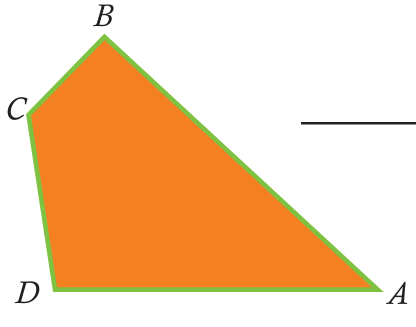
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Transformación isométrica

Isometría proviene del griego iso, prefijo que significa igual, y metría, que significa medir. Se denomina transformación isométrica de una figura a aquella que no altera su forma ni su tamaño.

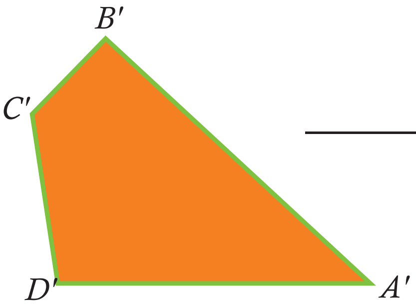
Para comprender las transformaciones isométricas utilizaremos la siguiente notación:

Llamaremos por las letras de sus vértices al polígono original, por ejemplo:



Polígono $ABCD$

Y llamaremos por las mismas letras con comillas al polígono después de haber realizado con él una transformación isométrica.



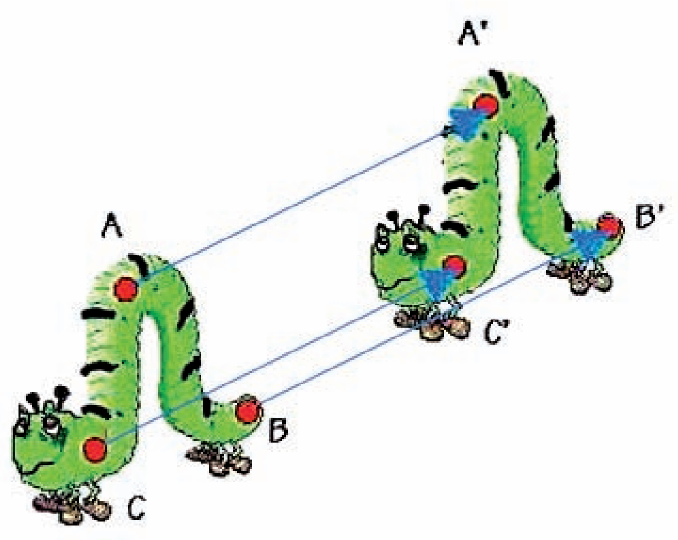
Polígono $A'B'C'D'$

Veremos a continuación tres tipos de transformaciones isométricas: traslación, simetría axial y rotación.

TRASLACIÓN

Transformación isométrica de una figura que consiste en el desplazamiento paralelo de todos sus puntos, es decir, la figura se desplaza completamente sobre una dirección en un sentido determinado y hasta una distancia determinada.

En la imagen podemos observar el desplazamiento de un dibujo que representa una cuncuna en la dirección y sentido señalada por las flechas. Así los puntos A, B y C han quedado en la posición de A', B' y C' respectivamente. Obsérvese que las flechas son del mismo tamaño, por lo que todos los puntos de la cuncuna ABC se han trasladado la misma distancia, paralelamente hasta conformar la cuncuna A'B'C'.



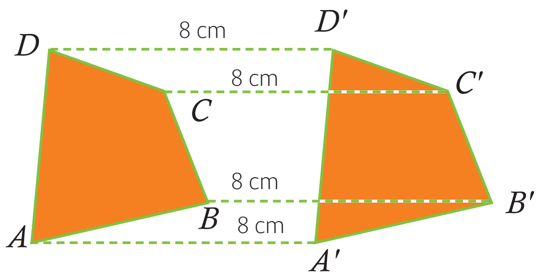
ELEMENTOS DE UNA TRASLACIÓN

Los elementos de una traslación son la dirección, el sentido y la magnitud.

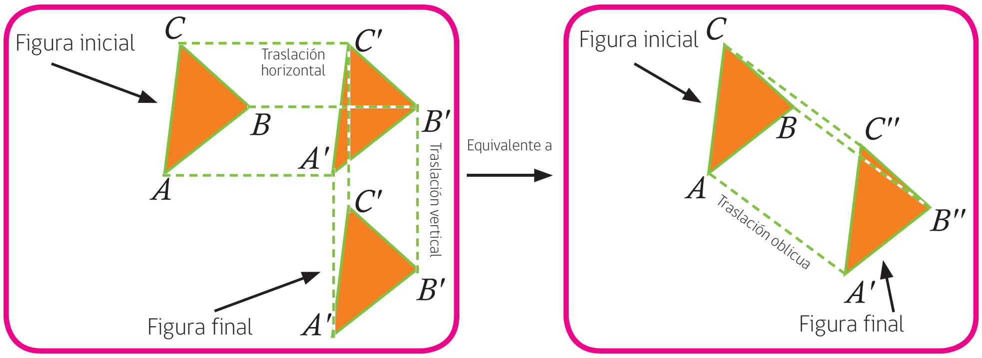
Dirección : Horizontal (hacia un lado), vertical (hacia arriba o abajo) u oblicuo.
Sentido: Derecha, izquierda, arriba o abajo.
Magnitud de desplazamiento : Es la distancia entre la posición inicial y final de cualquier punto de la figura trasladada.

Observe la siguiente traslación.

En ella nos podemos dar cuenta que la distancia entre cualquier punto de la figura original y el correspondiente punto en la figura obtenida, después de la traslación, es la misma.



En la siguiente imagen podemos observar que una traslación, a partir de dos movimientos, -primero una traslación horizontal, y luego una traslación vertical- es equivalente a una traslación oblicua.



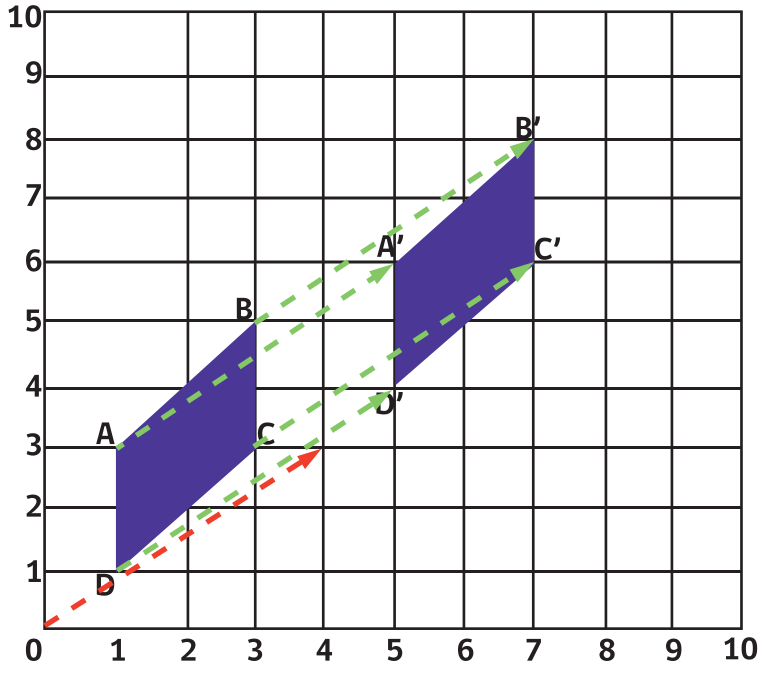
VECTORES EN LAS TRASLACIONES

Para indicar exactamente cuánto y hacia dónde se traslada una figura utilizamos vectores.

En el plano cartesiano, un vector se define como un par ordenado de números reales *(x, y),* dónde *"x"*: (el primer número) expresa la distancia en la que un punto de la figura se **mueve horizontalmente** e *"y"* (el segundo número) expresa la distancia en la que se **mueve verticalmente**.

TIPS

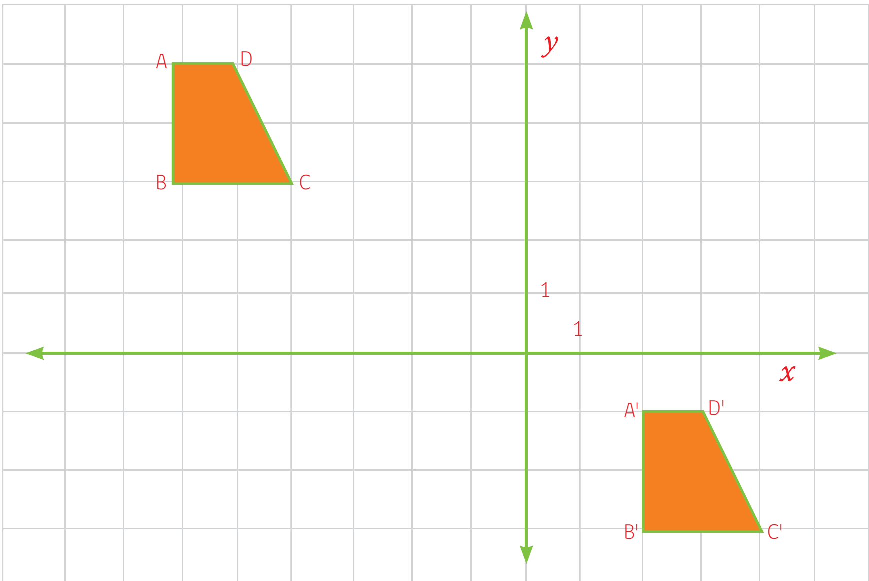
Recuerde que **par ordenado,** son dos números encerrados en un paréntesis y que corresponde a la ubicación de un punto en el plano cartesiano o eje de coordenadas. Su representación general es: (x, y)



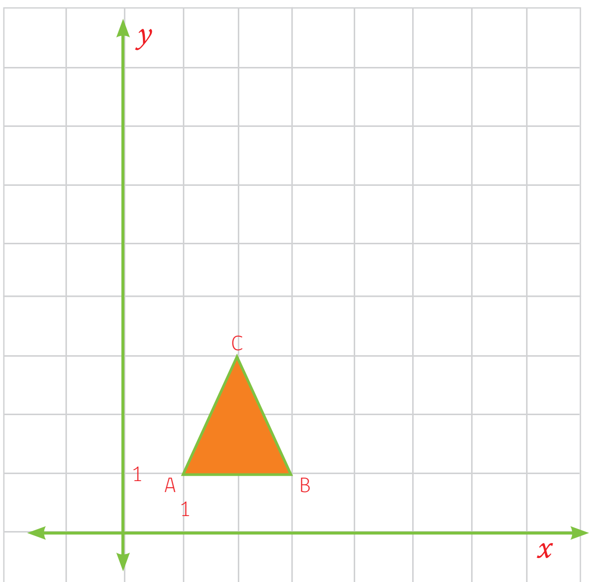
En la imagen el polígono ABCD se traslada en la dirección, sentido y magnitud de las flechas segmentadas, esto es, 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba, hasta convertirse en el polígono A'B'C'D'. Si se representan las flechas segmentadas por la flecha continua, que tiene su comienzo en el origen y su fin en el punto de cordenadas (4,3), se puede decir que el polígono ABCD se ha trasladado según el vector (4,3) convirtiéndose en el polígono A'B'C'D'.

ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios:**

1) Indique **¿cuál es el vector de traslación del cuadrilátero ABCD para llegar al cuadrilátero A' B' C' D' ?**



2) En el siguiente plano cartesiano dibuje la traslación del triángulo según el vector (4, 2).



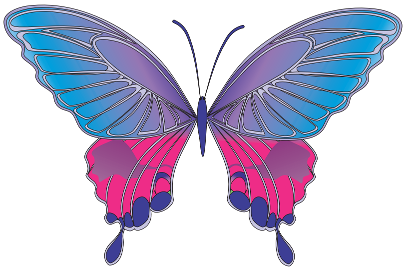
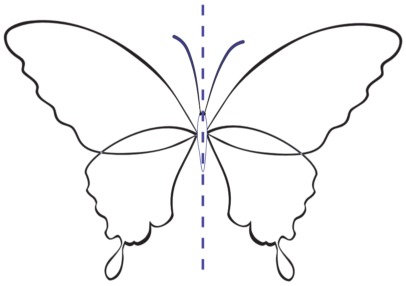
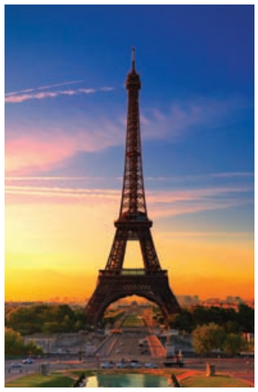
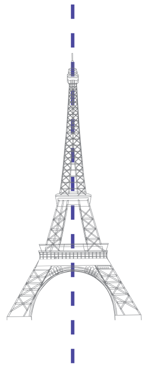
Actividad en el cuaderno

Dibuje el polígono de vértices (1.3), (2,4), (3,4), (3,6), (1,5) y (0,4) y luego dibuje su traslación según el vector (-6, -1).

SIMETRÍA AXIAL O REFLEXIÓN

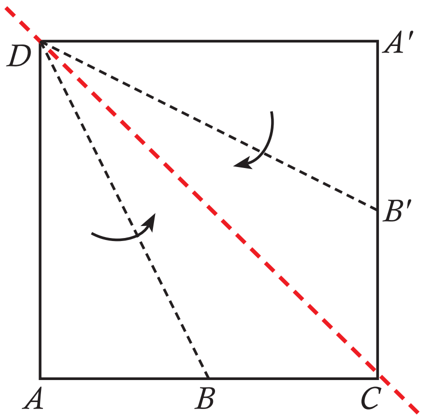
Transformación isométrica que consiste en que a cada punto de una figura, se le hace corresponder un único punto, llamado **reflejo**, de modo que ambos equidistan de una recta llamada **eje de simetría.**

Es posible observar **simetría axial** en la naturaleza y en inumerables construcciones. Algunos ejemplos en las siguientes imágenes.

El **eje de simetría** es una línea recta que divide una figura en dos mitades idénticas, de tal manera que el eje es una suerte de **espejo** y cada mitad de figuraes el **reflejo** de la otra. De ahí que la simetría axial es también conocida con el nombre de **simetría especular.**

Si dobláramos la figura en la mitad a lo largo del **eje de simetría**, tendríamos que los puntos de ambas mitades coinciden totalmente. Esto se puede ejemplificar con la figura siguiente, se puede apreciar que si la hoja cuadrada se pliega doblándola por la mitad, a través del eje de simetría CD, el punto B y su reflejo B′ coinciden tal como ocurre con la totalidad del resto de los puntos de ambas mitades.

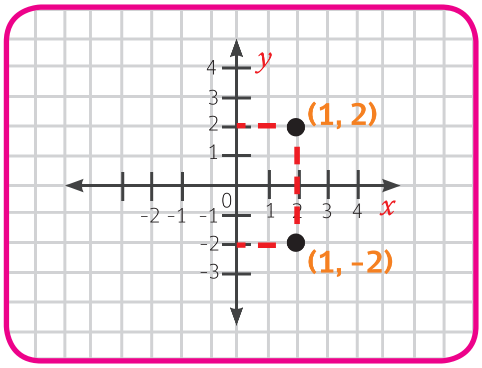


PUNTOS SIMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO

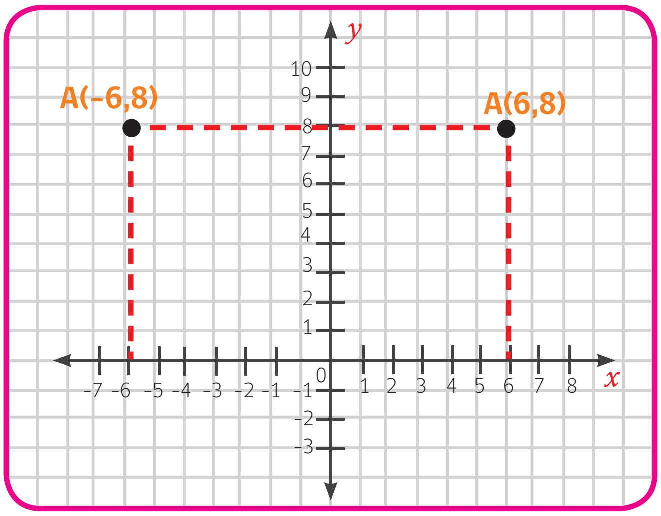
Si en un plano cartesiano consideramos como eje de simetría al eje x, el punto (x, y) tendrá como punto simétrico $(x, -y)$. Si el eje de simetría es el eje y, el punto (x, y) tendrá como simétrico el punto $(-x, y)$.

Ejemplos

1) Si el eje de simetría es el eje x, el simétrico del punto (1, 2) es el punto (1, −2).

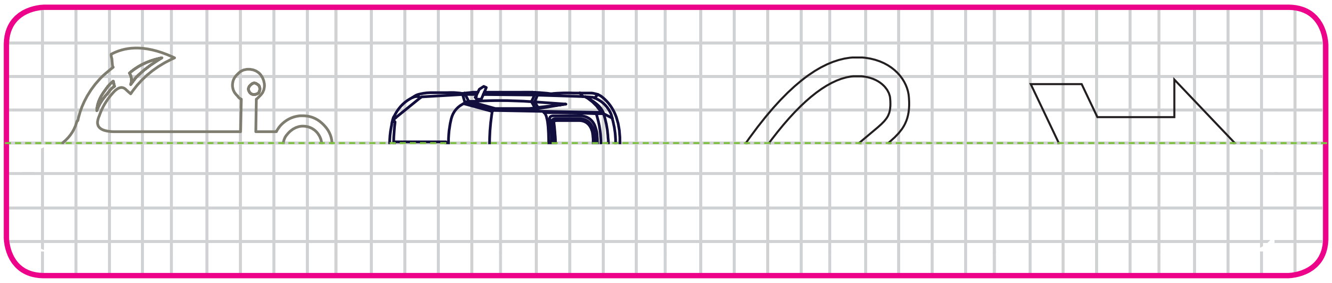


2) Si el eje de simetría es el eje y, el simétrico del punto (6, 8) es el punto (−6, 8).

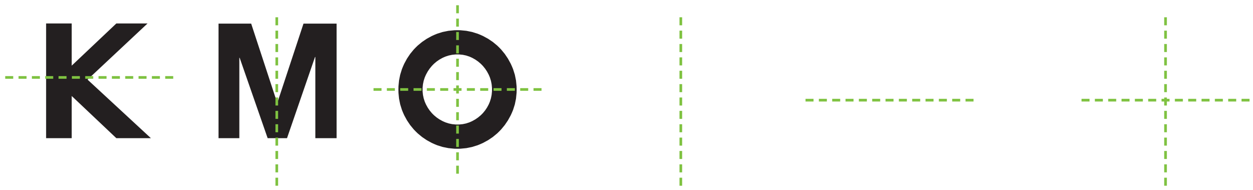


ACTIVIDAD

1) Complete las figuras reflejando cada una respecto del eje de simetría dado:



2) Las siguientes letras tienen eje de simetría; dibuje otras que también lo tengan.



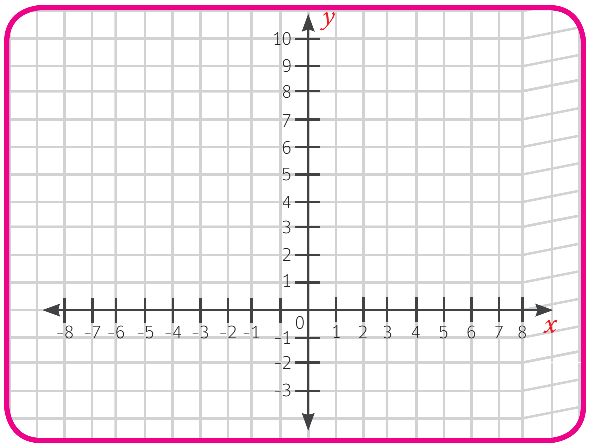
3) Escriba en cada recuadro las coordenadas del punto simétrico correspondiente y úbiquelos ambos en plano cartesiano.

a) P(5, 2)

b) Q(–8, 1)

c) R(3, –6)

d) S(–6, –4)



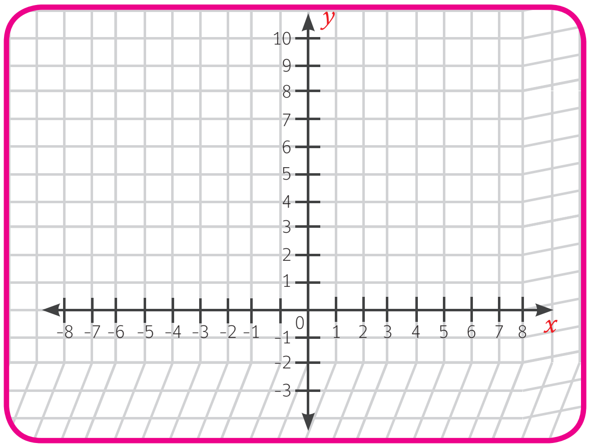
4) Considere como eje de simetría al eje y e indique cuáles son los puntos simétricos de:

a) M(2, 6)

b) N(–8, 1)

c) T(4, -5)

d) V(–2, -3)



5) Considere como eje de simetría la recta $y=3$, luego escriba en cada recuadro las coordenadas del punto simétrico correspondiente y ubíquelos ambos en plano cartesiano.

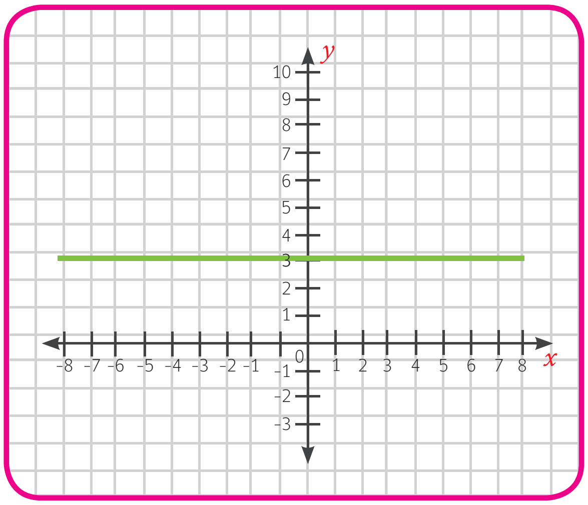
La gráfica de la recta $y=3$ es:

a) P(6, 1)

b) Q(–2, 5)

c) R(3, 9)

d) S(–1, –4)



6) Dibuje una figura que tenga:

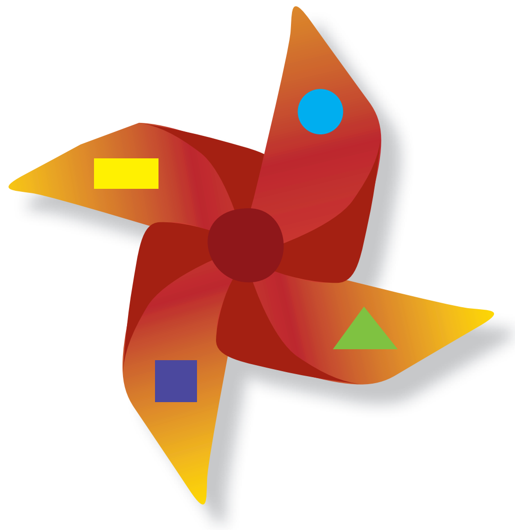
a) Dos ejes de simetría.

b) Tres ejes de simetría.

c) Infinitos ejes de simetría.

ROTACIÓN O GIRO

Movimiento que consiste en girar en un ángulo determinado, todos los puntos de una figura en torno a un punto llamado **centro de rotación.** La figura muestra un remolino que se puede girar en torno a su centro cuando se soplan las aspas. Un giro de 90º en el sentido contrario al giro de las manecilla del reloj, produce que aspa señalada con un círculo quede en el lugar del aspa señalada con un rectángulo, ésta en el lugar de la que tiene un cuadrado, la que a su vez queda en el lugar de la señalada con un triágulo y esta última, en el lugar de la que tiene un círculo. Un giro de 360º produce que el aspecto del remolino no cambie al final del giro.



DEFINICIÓN DE ROTACIÓN O GIRO EN TORNO A UN PUNTO

Elementos necesarios para la definición:

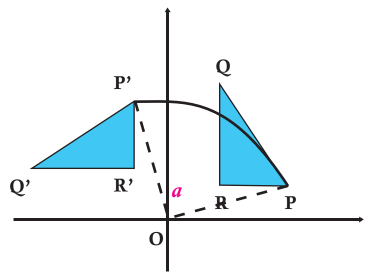
- **Centro de rotación:** Punto en torno al cual se rota o gira la figura (puede ser cualquier punto del plano, no necesariamente en la figura).
- **Magnitud de giro:** medida del ángulo en que se hace el giro. Este ángulo está formado por el centro de rotación, el segmento que une un punto cualquiera de la figura original con dicho centro y el segmento que une el punto correspondiente en la figura obtenida con el centro, después de la rotación.
- **Sentido del giro:** Este puede ser en contra o a favor del giro de las manecillas del reloj. En el primer caso se dice que el giro es positivo, en el caso contrario el giro es negativo. El sentido del giro se puede señalar mediante un signo + o – en el ángulo de rotación. Si no se especifica, se entiende que es positivo.

Definición:

Una figura experimenta una rotación de centro O y magnitud de giro *a* (positiva) si a cada punto P de la figura, se hace corresponder un punto P' del plano, de modo que P y P` corresponden a un mismo arco de circunferencia de centro = O y el ángulo POP' mide *a*.

Ejemplo en el plano cartesiano

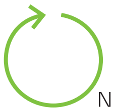
En la ilustración, el triángulo RPQ es la figura original que ha experimentado una rotación de centro O (el origen) y magnitud ***a*** de modo que cada uno de sus puntos tiene su correspondienteen el triángulo R'P'Q'.
Así R' es el correspondiente de R; P' y Q' lo son de P y Q respectivamente.
Podemos apreciar que la distancia entre O y P es la misma que entre O y P' pues OP y OP' son los radios de la misma circunferencia al estar P y P' sobre el mismo arco, esto es equivalente para todos los puntos de las figuras.



Ejemplos de rotación de una figura según un determinado ángulo:

TIPS

Si el ángulo de rotación es positivo el giro es hacia la izquierda y si el ángulo de rotación es negativo, el giro es hacia la derecha.


NEGATIVO

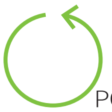
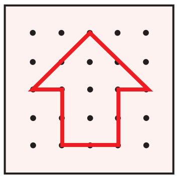
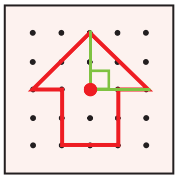
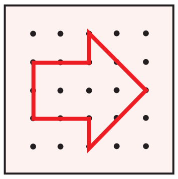
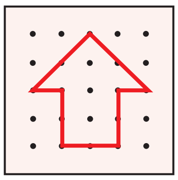
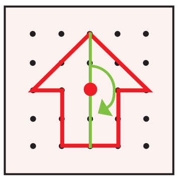
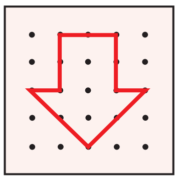
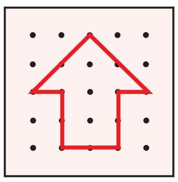
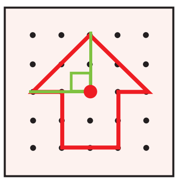
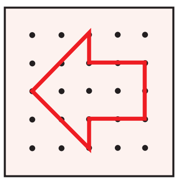
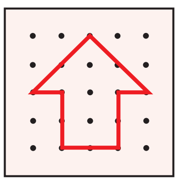
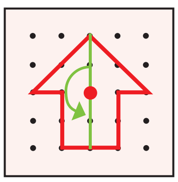
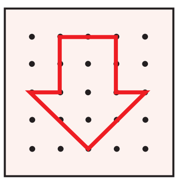
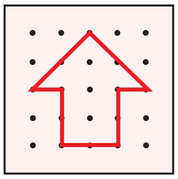
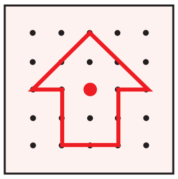
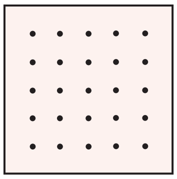
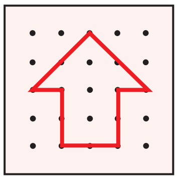
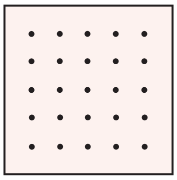
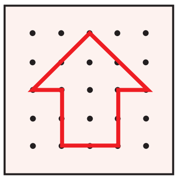
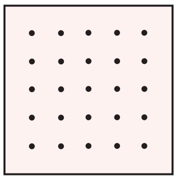
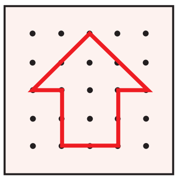
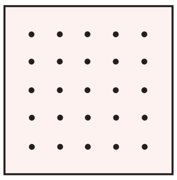

POSITIVO

Figura inicial	Análisis del ángulo de rotación	Figura final
	Girar 90º en sentido negativo alrededor del punto del centro 	
	Girar 180º en sentido negativo en torno al punto destacado en el centro 	
	Girar 90 en sentido positivo en torno al punto destacado en el centro 	
	Girar 180º en sentido positivo en torno al punto destacado en el centro 	

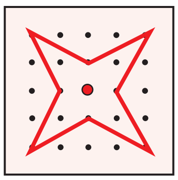
ACTIVIDAD Realice los siguientes ejercicios:

1) Analice el ángulo de rotación y dibuje la figura final en cada caso:

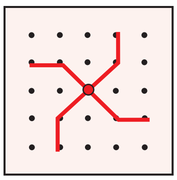
Figura inicial	Análisis del ángulo de rotación	Figura final
	Girar 270º en sentido negativo en torno al punto destacado en el centro 	
	Girar 360º en sentido positivo en torno al punto destacado en el centro 	
	Girar 270º en sentido positivo en torno al punto destacado en el centro 	
	Girar 360º en sentido negativo en torno al punto destacado en el centro 	

2) ¿Cuál o cuáles de estas figuras será(n) la(s) misma(s) después de una rotación de 90º?

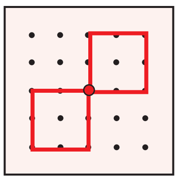
A



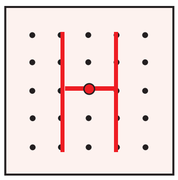
B



C



D



ESQUEMA DE RESUMEN DE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Tipos de transformaciones isométricas

TRASLACIÓN

ORIGINAL

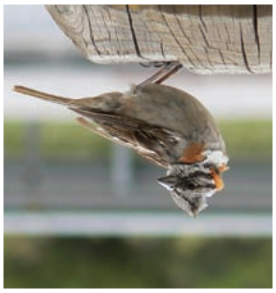
ORIGINAL

Consiste en un movimiento paralelo en cierta dirección sentido y distancia

ROTACIÓN

ORIGINAL

ORIGINAL



Consiste en un giro en torno a un centro de roatación

REFLEXIÓN O SIMETRÍA AXIAL

ORIGINAL

ORIGINAL

Consiste en una reflexión espectacular respecto a un eje de simetría

ACTIVIDAD Realice los siguientes ejercicios:

1) En cada situación escriba la transformación isométrica correspondiente:

a) Los movimientos de las manecillas de un reloj.

....

b) El movimiento del ascensor de un edificio.

....

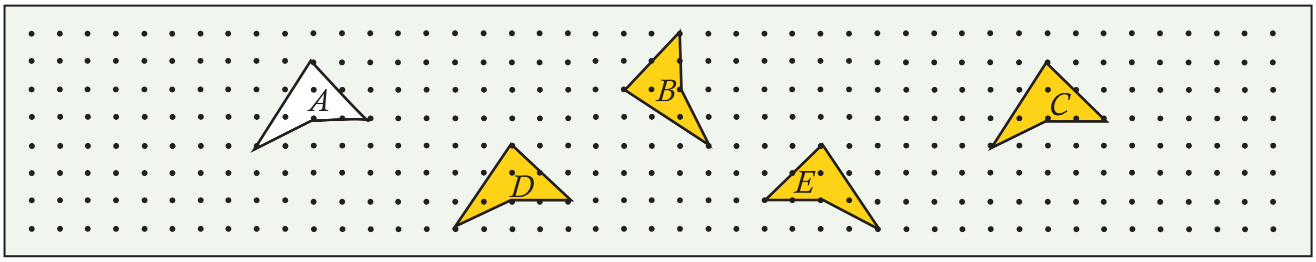
c) El movimiento de un carrusel.

....

d) La apertura y cierre de una puerta.

....

2) Observe las figuras que se obtuvieron a partir de la transformación isométrica aplicada al polígono A y responda:



a) ¿Qué transformaciones isométrica se han realizado al polígono A para obtener B?

....

b) ¿Qué transformaciones isométrica se han realizado al polígono A para obtener C?

....

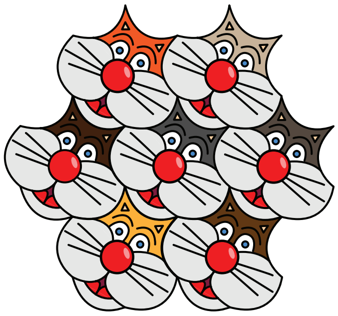
c) ¿Qué transformaciones isométrica se han realizado al polígono A para obtener D?

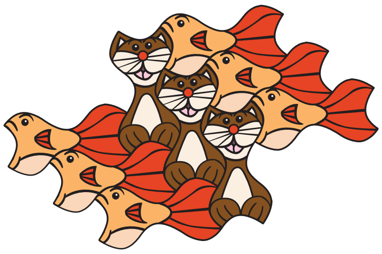
....

d) ¿Qué transformaciones isométrica se han realizado al polígono A para obtener E?

....

TESELACIONES O PAVIMENTACIONES





En estas obras podemos ver teselaciones. Se llama teselación al cubrimiento completo del plano utilizando figuras que no se superponen ni dejan espacios por cubrir.

En el siguiente enlace podrá observar algunas obras de M.C. Escher, pintor y matemático que realizó una diversidad de obras en las que se vislumbra una estrecha conexión entre las artes y las transformaciones isométricas.

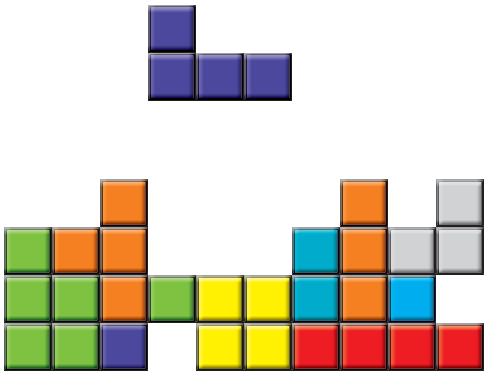
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/escher.htm

Actividad en el cuaderno

Investigue sobre obras artísticas y decorativas en las que se hayan utilizado transformaciones isométricas.

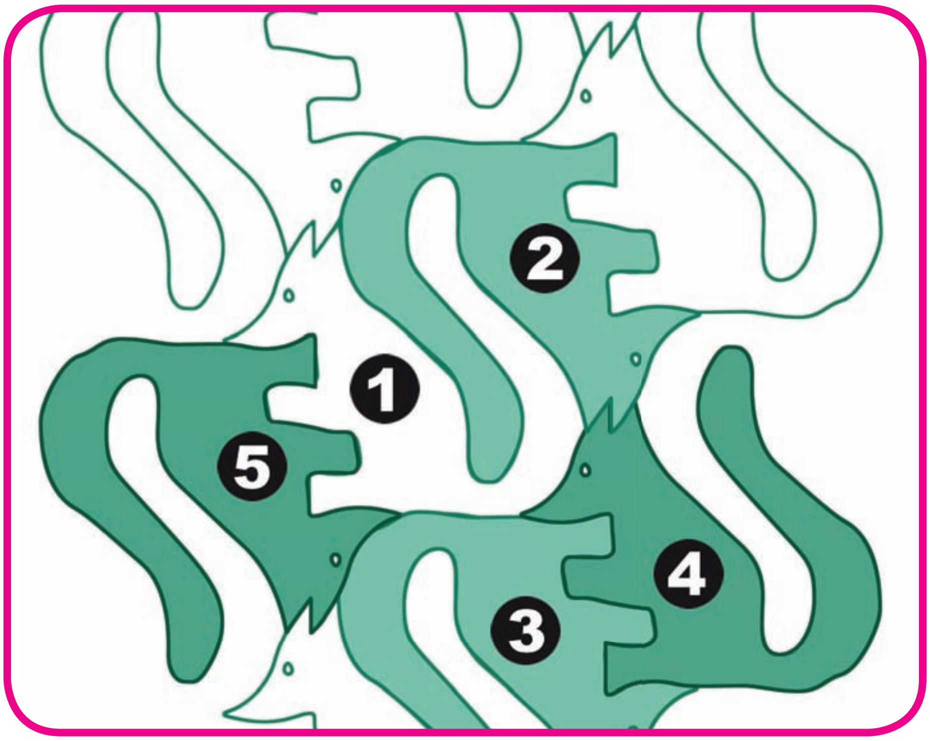
TIPS

¿Conoce el Tetris?



El tetris es un juego que consta de siete tipos de polígonos diferentes, que caen desde la parte superior de la pantalla. El jugador no puede impedir esta caída pero puede decidir rotar las piezas en 0º, 90º, 180º o 270º o trasladarlas horizontalmente buscando teselar el plano, ya que cuando una línea horizontal se completa, desaparece y todas las piezas que están por encima descienden una posición, liberando espacio y facilitando la tarea de situar nuevas piezas.

ACTIVIDAD **Observa la siguiente teselación y responda las preguntas:**



a) ¿Qué transformación isométrica permite pasar de la figura 1 a la 4?

....

b) ¿Qué transformación isométrica permite pasar de la figura 2 a la 6?

....

Guía de trabajo Nº 4

Geometría del Espacio

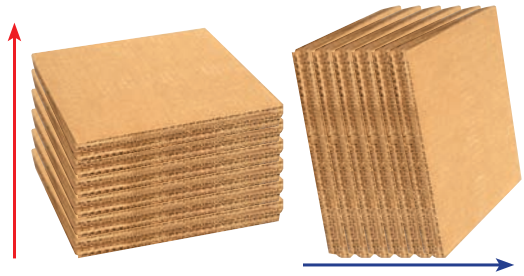
Contenidos

- **Generación de sólidos por traslación y rotación de polígonos.**
- **Volumen de cuerpos geométricos.**

24-10-13 7:16

SÓLIDOS GENERADOS POR TRASLACIÓN

Imagine que apila varios cuadrados congruentes de cartón, con esta acción formará un cuerpo geométrico. En la figura se observa el sólido formado por la traslación vertical de cuadrados, pro no es la única forma de generarlo ya que si realizamos una traslación horizontal, podemos obtener el mismo cuerpo geométrico.



Formalmente, un sólido generado por traslación es el resultado de "trasladar" un polígono en la dirección de un vector dado.

www.educarchile.cl/psu/estudiantes/Contenidos.aspx?sector=28nivel=48eje_tem_sem=127

ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios:**

1) Indique qué figura plana debe trasladar para formar:

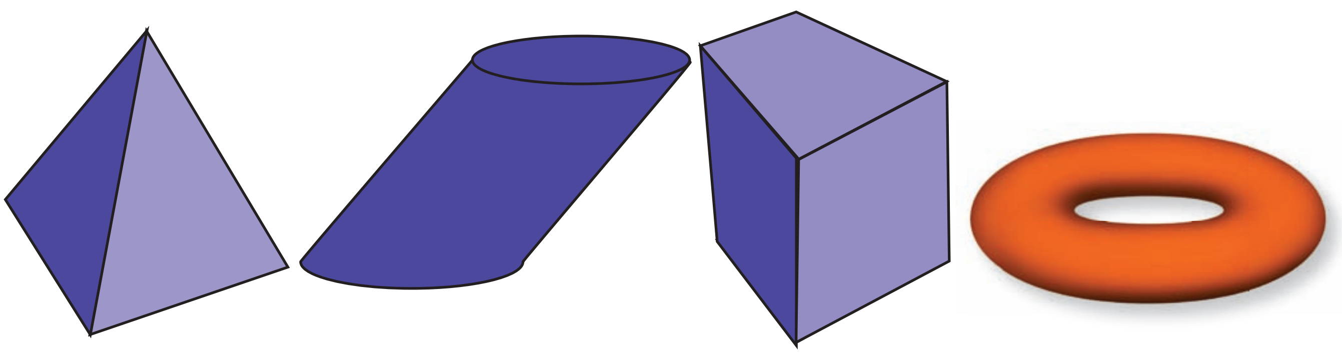
a) Un cilindro

....

b) Un prisma triangular

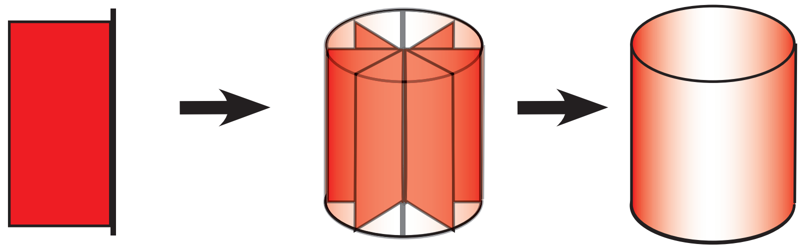
....

2) Determine qué cuerpos de las figuras siguientes, pueden ser generados por traslación e identifique la figura plana que los genera:



SÓLIDOS GENERADOS POR ROTACIÓN

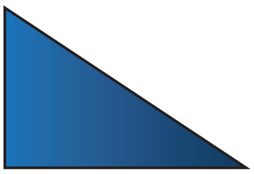
En esta imagen observamos un rectángulo que da un giro continuo y completo en torno a su lado mayor. El cuerpo generado es un cilindro cuya altura es su lado mayor y cuya base es un círculo es el lado menor del rectángulo.



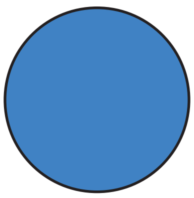
El giro continuo en el espacio tridimensional de una figura plana en torno a una recta determinada (eje) se denomina rotación. El cuerpo geómetrico generado se llama sólido de revolución.

ACTIVIDAD **Resuelva según lo indicado :**

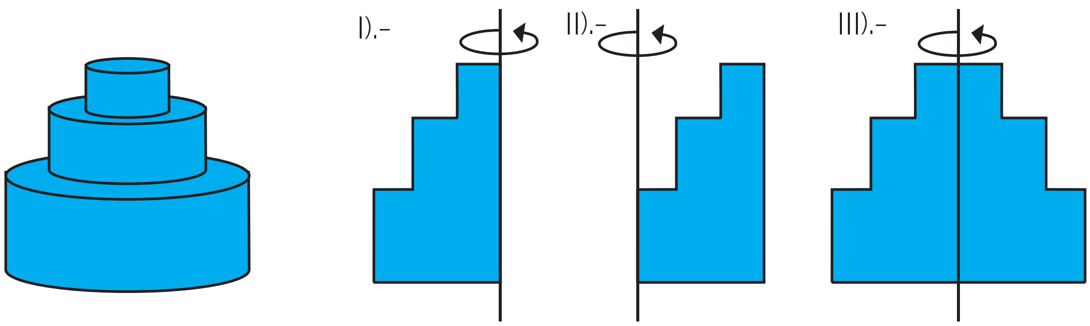
1) ¿Qué cuerpos geométricos se forman al hacer rotar el triángulo de la figura en torno a cada uno de sus lados?



2) ¿Qué cuerpo geométrico se forma al hacer rotar el círculo de la figura torno a uno de sus diámetros?



3) Indique la(s) posible(s) figura(s) generadora(s) del cuerpo siguiente:



DE_60081.indd 51 24-10-13 7:17

Activadad en el cuaderno

Responda las siguientes preguntas en su cuaderno:

1) ¿Se puede generar un cono por traslación? ¿Y por rotación? ¿Si fuese posible, cómo se haría?
2) ¿Se puede generar un cilindro por traslación? ¿Y por rotación? ¿Si fuese posible, cómo se haría?
3) ¿Cómo se puede generar un cubo?
4) ¿Se puede generar una pirámide por traslación? ¿Y por rotación?
5) ¿Qué diferencias observan entre cuerpos generados por rotación y traslación?
6) ¿Qué característica tienen las bases de los distintos sólidos generados por rotación?

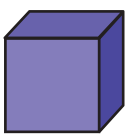
CUERPOS GEOMÉTRICOS

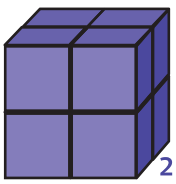
Observe las siguientes imágenes; en cada una de ellas hay cuerpos geométricos que acostumbramos ver día a día:

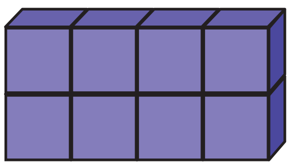


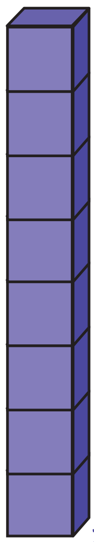

Volumen de cuerpos geométricos

El **volumen** de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa y su **medida** es el número de **unidades cúbicas** que "cabrían" en ese espacio. Para calcular el volumen de un cuerpo en el espacio lo comparamos con un cubo cuya arista mide 1 unidad.









En las imágenes puede observar cuerpos geométricos de volumen 8 unidades cúbicas, pues están formados por 8 cubos de arista 1 unidad.

EXPRESIONES MATEMÁTICAS PARA CALCULAR EL VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

TIPS

A_{base}: Indica el área de la base.

Cubos, prismas y cilindros rectos

Supongamos que cada bloque cuadrado de la figura mide 15 pulgadas por lado y 2 pulgadas de grosor ¿Cuál es el volumen de los 6 bloques apilados?

La superficie cuadrada del bloque de la base mide 15 x 15 = 225 pulg^2. Si se observa la ilustración, este base se traslada a lo largo de 6 x 2 pulg. = 12 pulg. Por lo tanto el volumen es 225 pulg^2. x 12 pulg. = 2700 pulg^3.

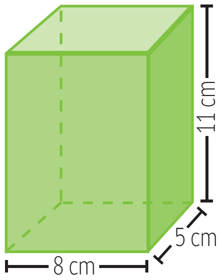
Para calcular el volumen de cubos, prismas y cilindros rectos multiplicaremos el área del polígono base por su altura, es decir:

$$V = A_{base} \cdot h$$

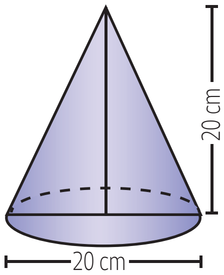
ACTIVIDAD **Resuelva los siguientes ejercicios y situaciones:**

1) Calcule el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

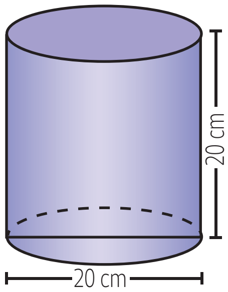
a)



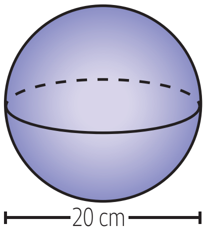
b)



c)



d)



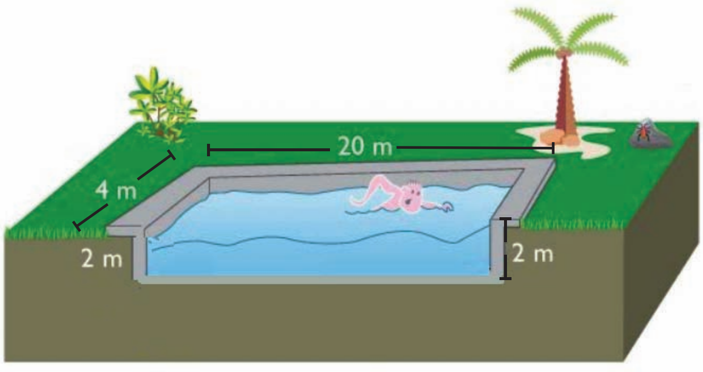
2) La fotografía muestra un envase cilíndrico que contiene ajustadamente 3 pelotas de tenis de aproximadamente 10 cm de diámetro cada una, existe una distancia de 2 cm entre la tapa del envase y la pelota más próxima dentro de él.

a) ¿Cuál es el volumen del cilindro vacío (tome π =3) ?
b) ¿Cuál es el volumen de cada pelota de tenis?
c) ¿Cuál es el volumen del espacio entre las pelotas y el cilindro?

3) La cápsula que contiene un medicamento tiene la forma de cilindro con 2 semiesferas en los extremos. La longitud total de la cápsula es de 20 mm. y el diámetro del cilindro 8 mm. ¿Cuál el volumen de la cápsula (tome π = 3)?

4) En una planta de salitre almacenan el mineral formando cerros, con forma de cono de 40 m de radio y 10 m de altura. Si el salitre acumulado debe ser transportado en un camión con capacidad de carga de 300 m^3, **¿cuántos viajes realiza el camión para trasladar todo el salitre?**

5) Calcule la cantidad de metros cúbicos de agua que necesita para llenar la siguiente piscina.



6) Una empresa productora de jugos vende su producto en cajas individuales con forma de prismas de base cuadrada de lado 3 cm y altura 12 cm. Deciden cambiar el tamaño del envase disminuyendo la altura en 2 cm y aumentando el lado de la base en 1 cm.

a) El volumen del nuevo envase **¿es mayor o menor que el antiguo?**

b) El valor de la caja de jugo tiene un valor de 300 pesos. Si la empresa envasa 1200 litros de jugo al mes **¿Cuánto dinero recibe con el envase antiguo? ¿y con el nuevo envase?**
Recuerde 1 litro = 1000 cc

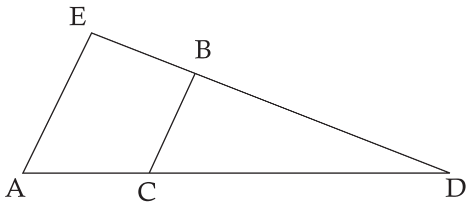
DE_60081.indd 56 24-10-13 7:18

EVALUACIÓN

Seleccione la alternativa correcta en cada una de las preguntas, encierre en un círculo la alternativa correcta.

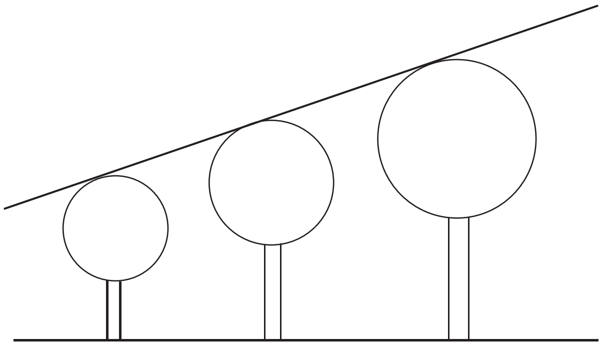
1) $\overline{AE} // \overline{CB}$. Determine la medida de $\overline{DB}$ si $\overline{AD} = 20\ cm$, $\overline{AC} = 6\ cm$ y $\overline{ED} = 18\ cm$

a) *12,6 cm*
b) *15 cm*
c) *11 cm*
d) *13 cm*
e) *18 cm*



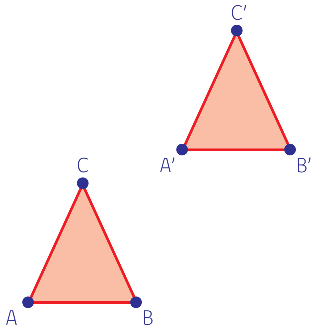
2) 3 árboles se encuentran alineados como se muestra en la figura, el más pequeño mide 2 m, y el mediano 3 m, si la distancia entre cada par de árboles es de 3 m, ¿cuánto mide el árbol más alto?

a) *3 m*
b) *3,5 m*
c) *4 m*
d) *4,5 m*
e) *5 m*



3) ¿Qué trasformación isométrica se aplica al triangulo ABC para obtener el triángulo A'B'C'?

a) Traslación
b) Rotación
c) Simetría central
d) Simetría Axial



4) ¿Qué figura muestra una reflexión de  ?

a) 

b) 

c) 

d) 

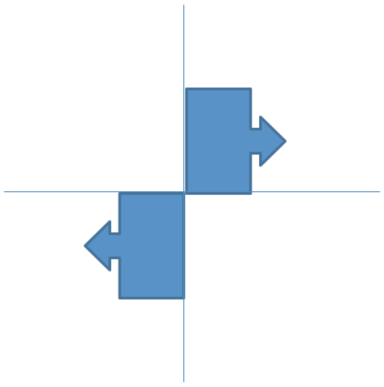
5) ¿Qué tipo de transformación isométrica se muestra en la figura?

a) Simetría axial

b) Reflexión

c) Simetría central

d) Rotación



5) ¿Qué figura NO permite realizar un teselado?

a) Triangulo equilátero

b) Cuadrados

c) Círculos

d) Hexágonos

BIBLIOGRAFÍA

1. Decreto Supremo de Educación Nº 211 de 2009.
2. Decreto Supremo de Educación Nº 257 de 2009.
3. Peterson, J. (2002). Teoría de la aritmética. México: Editorial Limusa S. A.
4. Zill, D.G. y Dewar, J.M (2003). Álgebra y trigonometría. Colombia: 2003.
5. Programa de estudios de educación de adultos del Ministerio de Educación.

Enlaces de interés

Polígonos

www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/figuras-planas-regulares.html

Área y perímetro de polígonos

http://recursospcpi.files.wordpress.com/2011/04/perc3admetros-y-c3a1reas-de-figuras-planas-ejercicios.pdf

Ejercicios semejanza de figuras planas:

www.unicoos.com/images/geometria%20en%20el%20espacio%20-%20ejercicios%20resueltos.pdf

Teorema de Thales

www.profesorenlinea.cl/geometria/Teorema_de_Tales.html

Transformaciones isométricas y ejercicios:

www.profesorenlinea.cl/geometria/Isometria_Transformaciones.html
www.geolay.com/movimientos/
www.sectormatematica.cl/media/NM1/NM1_transf_isometricas_psu.doc

Teselaciones

www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm

Volumen de cuerpos geométricos

thales.cica.es./rd/Recursos/rd99/ed99-0263-02/geometria/problemas/indicep2.htm

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile