Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Guía de Aprendizaje Nº 1

“NÚMEROS, LETRAS, ECUACIONES. ¡UNA BUENA COMBINACIÓN!”

Educación Matemática

Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje Nº 1

“NÚMEROS, LETRAS, ECUACIONES. ¡UNA BUENA COMBINACIÓN!”

Educación Matemática

Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje N°2

"NÚMEROS, LETRAS, ECUACIONES. ¡UNA BUENA COMBINACIÓN!"
Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media
Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Segunda edición, año 2013
Inscripción Nº 212.874

Autores:
Mauricio Huircán Cabrera

Colaboradores:
Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé,
María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas, Carolina Marambio Cárcamo
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda y Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:
Jose Luis Moncada Campos

Revisión editorial matemática:
Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Normalización de Estudios
División de Educación General

Impreso por:
RR Donnelley

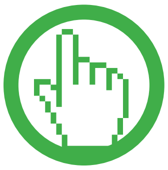
Año 2013
Impresión de 99.000 ejemplares

Iconografía

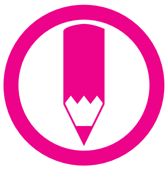
Información
Indica que aparece información en el contenido.

Atención
Indica que el cuadro posee información clave para comprender el contenido.

Tips
Indica al estudiante información breve respecto de un tema.



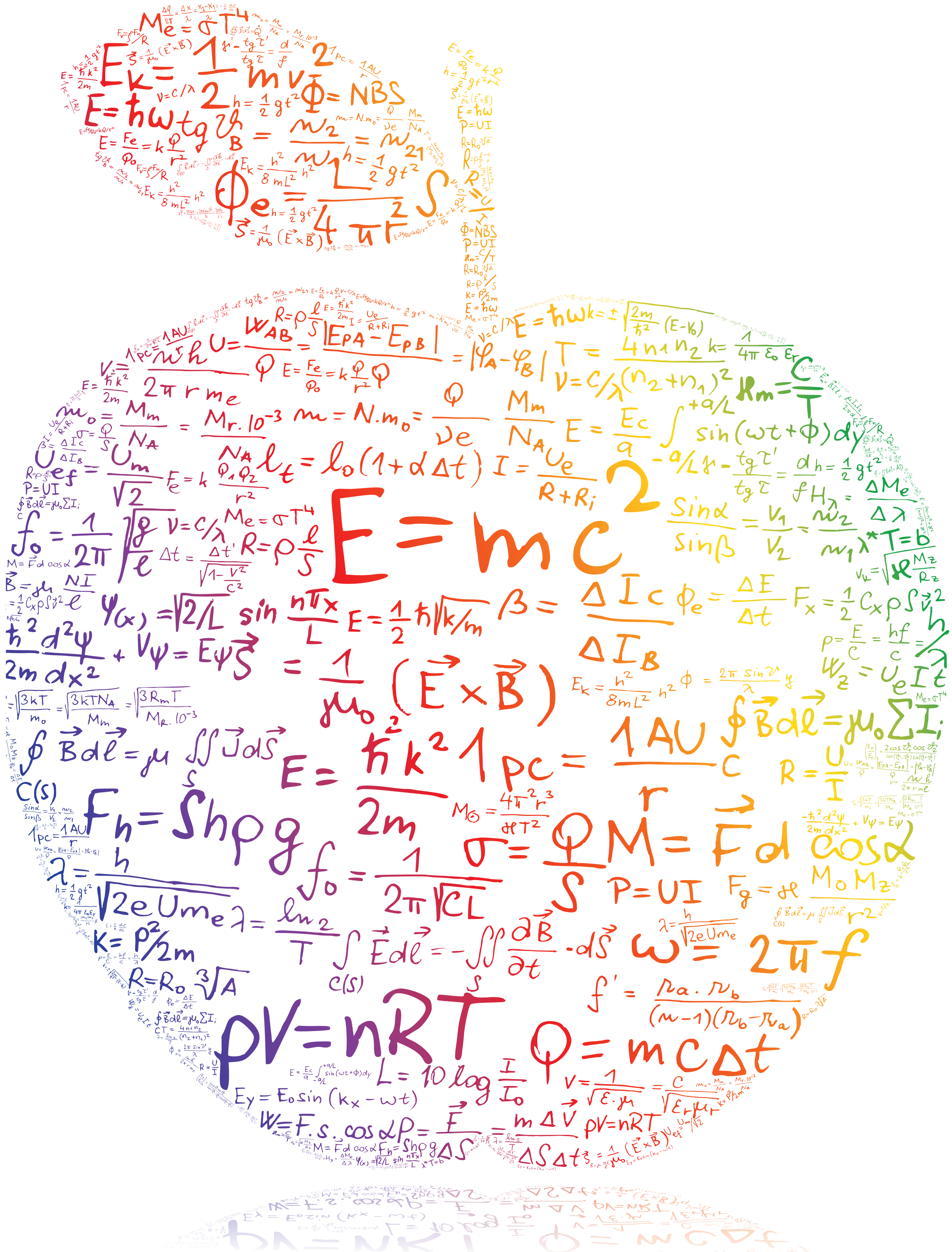
Página Web
Indica una página web que complementa el contenido.



Actividad
Indica que el estudiante debe aplicar lo aprendido en ejercicios propuestos.

Actividad en el cuaderno
Indica que el estudainte debe desarrollar el trabajo propuesto en su cuaderno.

Evaluación
Indica una evaluación final de contenidos.


E=mc2
pV=nRT
Q=mcΔt
ω=2πf
P=UI
M=Fd cosα
Φ=NBS
E=ħω
1AU
1pc=
K=P2/2m
R=R0 3√A
Ey=E0sin(kx-ωt)
L=10 log I/I0
E=ħk2/2m
Fh=Shρg
λ=h/√2eUme
f0=1/2π√CL

Presentación

"El material que la Coordinación Nacional de Normalización de Estudios para la Educación de Adultos del Ministerio de Educación (Mineduc) está poniendo a su disposición, pretende ser una herramienta de apoyo a los estudiantes del segundo nivel de educación media, ya sea de la modalidad regular o flexible, entregando conceptos matemáticos, ejemplos resueltos de problemas y manteniendo la propuesta didáctica de las guías de aprendizaje del primer nivel, consistente en desarrollar el trabajo, desde lo más simple a lo más complejo fomentando la capacidad de autoaprendizaje en los estudiantes.

Esta guía presenta dos unidades de trabajo, en las que se abordan contenidos de raíces cuadradas y de ecuación cuadrática, considerando como eje transversal para el tratamiento de ambos contenidos la resolución de problemas.

El desarrollo de las unidades de trabajo considera la secuencia didáctica: inicio, desarrollo y cierre, poniendo énfasis en mostrar ejemplos resueltos completos y otros que se van completando con el apoyo del docente o a través del autoaprendizaje con el objetivo de fomentar la rigurosidad y precisión de los conceptos matemáticos.

Es importante destacar que el proceso de aprendizaje de las matemáticas, al igual que otras ciencias, es personal y pasa por la dedicación y trabajo de la persona que aprende. Queremos invitar a usted a trabajar de manera muy dedicada en esta guía de aprendizaje y descubrir herramientas matemáticas que podrá hacer parte de su vida. Al finalizar este ciclo de seis guías tendremos la satisfacción de haber podido entregar, a cada estudiante, herramientas para el aprendizaje de las matemáticas, las que le serán útiles para su vida y desarrollo personal, en directo beneficio de nuestro país.

Guía de trabajo Nº 1

"La Raíz cuadrada y algo más"

Contenidos

- **Raíz cuadrada como proceso inverso de potencias con exponente dos y como potencias de exponente fraccionario $\frac{1}{2}$.**
- **Deducción, verificación y aplicación de las propiedades de las raíces de índice dos.**

Raíz cuadrada de x: ($\sqrt{x}$) se entenderá por raíz cuadrada de un número positivo x, un número que, al multiplicarlo por sí mismo, nos entrega como resultado el número x.

Cuadrado de un número ($x^2 = x \bullet x$) es el producto de un número multiplicado por sí mismo.

El cálculo de la **raíz cuadrada** y **elevar un número al cuadrado,** son operaciones inversas.

$\sqrt{9} = \pm 3$ porque $3 \bullet 3 = 9$ o también $-3 \bullet -3 = 9$

$\sqrt{49} = \pm 7$ porque $7 \bullet 7 = 49$ o también $-7 \bullet -7 = 49$

http://es.scribd.com/doc/52880684/Raiz-cuadrada.

APRENDIENDO A USAR LAS RAÍCES CUADRADAS

Muchos problemas matemáticos, científicos y tecnológicos, requieren del cálculo de raíces cuadradas: Dada el área de un cuadrado calcular el valor de la medida de uno de sus lados; el cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo; el tiempo en caída libre de un cuerpo. Todos ellos conducen a planteamientos tales como estos:

$x^2 = 81$	$y^2 = 121$	$w^2 = 36$	$r^2 = 25$

La raíz consiste en encontrar la base de la potencia conociendo el exponente y la **cantidad subradical**.

Exponente de la potencia

Índice de la raíz

$$x^n = a \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[n]{a} = x \longleftarrow$$

Valor de la raíz

Base de la potencia

Valor de la potencia

Cantidad subradical

En este caso:

La extracción de la raíz cuadrada se indica por medio del ***signo radical*** : $\sqrt{\ }$. La cantidad de la cual se extrae la raíz, se llama ***cantidad subradical :***

Por ejemplo, al extraer la raíz cuadrada de cada número:

$x^2 = 81 \ / \pm\sqrt{\ }$	$y^2 = 121 \ / \pm\sqrt{\ }$	$w^2 = 36 \ / \pm\sqrt{\ }$	$r^2 = 25 \ / \pm\sqrt{\ }$
$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{81}$	$\sqrt{y^2} = \pm\sqrt{121}$	$\sqrt{w^2} = \pm\sqrt{36}$	$\sqrt{r^2} = \pm\sqrt{25}$
$x = \pm 9$	$y = \pm 11$	$w = \pm 6$	$r = \pm 5$
$x = 9$ o $x = -9$	$y = 11$ o $y = -11$	$w = 6$ o $w = -6$	$r = 5$ o $r = -5$

Actividad en el cuaderno

Determine el valor de las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{4} =$ **b)** $\sqrt{16} =$ **c)** $\sqrt{256} =$

d) $\sqrt{25} =$ **e)** $\sqrt{100} =$ **f)** $\sqrt{400} =$

RAÍZ CUADRADA Y LENGUAJE ALGEBRAICO

Lo expuesto anteriormente se puede generalizar:

Cálculo de una raíz cuadrada

Una raíz de índice par existe, si la cantidad subradical es un número mayor o igual a cero.
$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = b \Leftrightarrow b$ es positivo o cero y $b^2 = a$

Elevar al cuadrado un número y extraer su raíz cuadrada, son operaciones inversas. El número no se altera si está afectado por las dos operaciones, al mismo tiempo: $\sqrt{a^2} = a,\ a > 0$

Ejemplos:

a) $\sqrt{7^2} = 7$	**b)** $\sqrt{1.924^2} = 1.924$	**c)** $\sqrt{11^2} = 11$
d) $\sqrt{17^2} = 17$	**e)** $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$	**f)** $\sqrt{61^2} = 61$
g) $\sqrt{(7.500x)^2} = 7.500x$	**h)** $\sqrt{12.524^2} = 12.524$	**i)** $\sqrt{69^2} = 69$

Explique lo que usted entendió del trabajo con las raíces cuadradas:

....

....

....

....

....

....

TIPS

Las raíces cuadradas datan de la época de los egipcios y aparecen en documentos como el papiro de Ajmeed en el que se muestra cómo obtener raíces cuadradas. Por lo tanto, se atribuye a los egipcios el invento de la raíz cuadrada, aunque verdaderamente su origen se pierde en la antigüedad.

http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=133242

PROPIEDADES DE LA RAÍZ CUADRADA

1) $\sqrt{a \bullet b} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{b}$

TIPS

La raíz cuadradas de un producto es igual al producto de las raíces cuadrada de sus factores.

Ejemplo :

$\sqrt{144} = \sqrt{9} \bullet \sqrt{16} = 12$

$3 \bullet 4 = 12$

$\sqrt{90} = \sqrt{16 \bullet 5} = 4 \bullet \sqrt{5}$

4

Ejercicios de aplicación de la propiedad:

Propiedad: $\sqrt{a \bullet b} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Complete lo que falta en cada ejemplo:

a) $\sqrt{676} = \sqrt{169 \bullet 4} = \sqrt{169} \bullet \sqrt{4} =$ .... $\bullet\ 2 = 26$

b) $\sqrt{250.000} = \sqrt{10.000} \bullet \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ = ... • .... $= 500$

c) $\sqrt{1.764} = \sqrt{196 \bullet 9} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} \bullet \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ = ... • .... = ...

d) $\sqrt{1.156} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} \bullet \sqrt{4}$ = ... • 2 = ...

e) $\sqrt{20} = \sqrt{4} \bullet \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ = ... $\bullet \sqrt{5}$

f) $\sqrt{120} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} \bullet \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$ = ... $\bullet \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$

2) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$

TIPS

La raíz cuadrada de un cociente es igual al cociente de la raíz cuadrada de su numerador y denominador.

Ejemplo :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Ejemplos de aplicación de la propiedad:

Propiedad: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$, $(a \geq 0, b > 0)$ o $(a \leq 0, b < 0)$. Complete lo que falta en cada ejemplo:

a) $\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt{\dots\dots}}{\sqrt{25\dots\dots}} = \dfrac{3}{\dots\dots}$

b) $\sqrt{\dfrac{169}{625}} = \dfrac{\sqrt{169}}{\sqrt{625}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

c) $\sqrt{\dfrac{81}{225}} = \dfrac{\sqrt{\dots\dots}}{\sqrt{\dots\dots}} = \dfrac{\dots\dots}{15}$

d) $\sqrt{\dfrac{196}{25}} = \dfrac{\sqrt{\dots\dots}}{\sqrt{\dots\dots}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

e) $\sqrt{\dfrac{289}{361}} = \dfrac{\sqrt{\dots\dots}}{\sqrt{\dots\dots}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

3) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad a > 0$

Ejemplo :

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

Ejercicios de aplicación de la propiedad:

Propiedad: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $(a > 0)$. Complete lo que falta como en el ejemplo: $\sqrt{69} = 69^{\frac{1}{2}}$

a) $\sqrt{1.589}$ = ... **b)** $\sqrt{79}$ =....... **c)** $\sqrt{8}$ = ... **d)** $\sqrt{17}$ = ...

TIPS

Toda raíz cuadrado puede expresarse en forma de potencia

Actividad en el cuaderno

Ejercicios con raíces cuadradas

1. Calcule las siguientes raíces cuadradas.

a) $\sqrt{625}$ = **b)** $\sqrt{64}$ = **c)** $\sqrt{49}$ = **d)** $\sqrt{144}$ = **e)** $\sqrt{169}$ = **f)** $\sqrt{3.240000}$ =

2. Calcule las siguientes raíces.

a) $\sqrt{\frac{16}{9}}$ = **b)** $\sqrt{\frac{25}{4}}$ = **c)** $\sqrt{\frac{9}{100}}$ =

3. En cada caso, calcule el valor de la expresión.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{25} - \sqrt{49}$ = **b)** $\sqrt{9} - 2 \bullet \sqrt{16} + \sqrt{100}$ = **c)** $\sqrt{121} + \sqrt{64} + \sqrt{16}$ =

4. En cada caso, reduzca al máximo.

a) $2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - \sqrt{7}$ = **b)** $6\sqrt{5} + 6\sqrt{20} - 2\sqrt{5}$ =

c) $\sqrt{54} - \sqrt{24}$ = **d)** $\sqrt{80} + \sqrt{20}$ =

e) $\sqrt{75} - \sqrt{12} - \sqrt{147}$ = **f)** $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{100} - 2\sqrt{27}$ =

5. Realice las siguientes operaciones.

a) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$ = **b)** $(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$ =

c) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$ = **d)** $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$ =

EVALUACIÓN

Páginas de Internet recomendadas
www.sectormatematica.cl

Marque con una X la alternativa correcta:

1) El resultado de la raíz $\sqrt{144}$ es:

a) 11 **b)** 12 **c)** 10 **d)** 14

2) Al reducir al mínimo la expresión: $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$ se obtiene:

a) $5\sqrt{5}$ **b)** $7\sqrt{5}$ **c)** $2\sqrt{5}$ **d)** $6\sqrt{5}$

3) Al realizar la operación; $(\sqrt{3} + 1) \bullet (\sqrt{3} - 1)$ se obtiene:

a) 2 **b)** 3 **c)** 1 **d)** -1

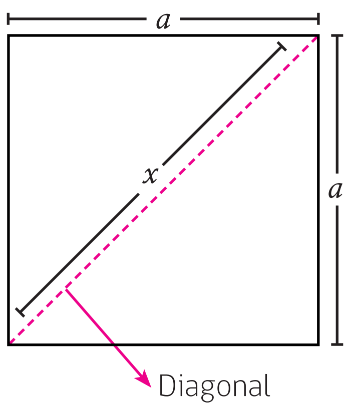
ACTIVIDAD Resuelva las siguientes situaciones que involucran raíces cuadradas

TIPS

El área de un cuadrado se determina como el producto de la longitud de dos de sus lados. En el ejercicio propuesto el área de un cuadrado es de 81 m^2, **¿Cuál es la longitud de su lado y de sus diagonales?**

Solución:

$$A = a \bullet a = a^2$$



1) $a^2 = 81^2 \longrightarrow a = \sqrt{81} \longrightarrow a = 9$. La longitud del lado del cuadrado es de 9 metros.

2) Para determinar la longitud de la diagonal se utiliza el Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 9^2 + 9^2$

$x^2 = 2 \bullet 9^2$

$x^2 = 2 \bullet 81 \; / \pm\sqrt{\;}$

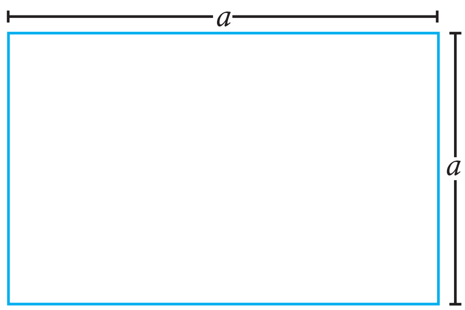
$x = \sqrt{2 \bullet 81}$

$x = \sqrt{2} \bullet 9 = 9\sqrt{2}$

Por lo tanto la longitud de la diagonal del cuadrado es $9\sqrt{2}$ metros.

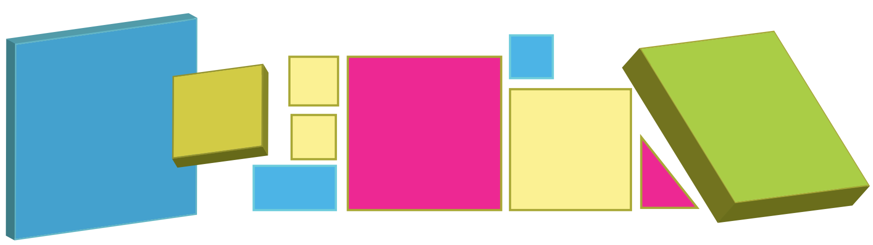
Área de un rectángulo

$$A = a \bullet b$$



Perímetro de un rectángulo

$$P = a + b + a + b = 2a + 2b$$



1) Dadas las áreas de las regiones cuadradas, determine la longitud de sus lados: (Sugerencia: A = a^2). Aplicar raíz cuadrada para determinar la medida de cada lado.

TIPS

Cuando hay que calcular distancias utilizando raíces cuadradas, el resultado siempre es positivo.

Cuadrado	Área	Longitud del lado
169 u²	$a^2 = 169\ u^2 \ / \pm\sqrt{\ }$ $a = \sqrt{169\ u^2}$ $a = 13\ u$	$a = 13\ u$
196 u²		
289 u²		
361 u²		
441 u²		
1600 u²		

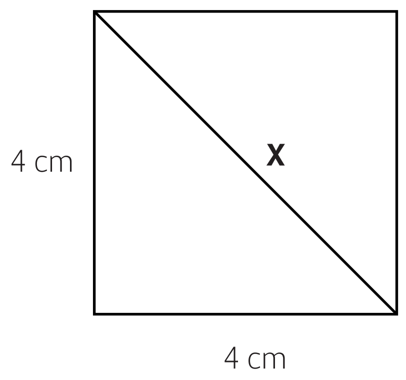
Actividad en el cuaderno

Determine la diagonal de cada cuadrado y su perímetro

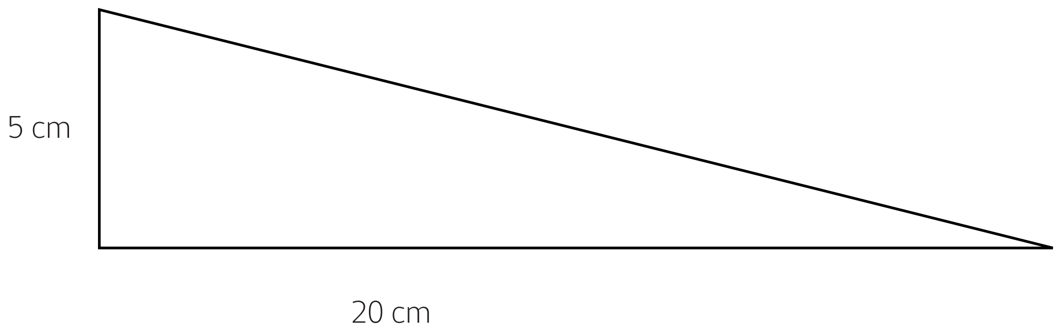
DE_60241.pdf 16 06-11-13 14:03

2) Realizar los siguientes cálculos

a. La medida de la diagonal de un cuadradro de lado 4 cm.



b. La hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura.

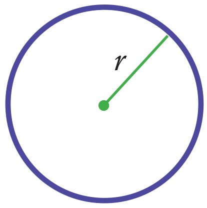


c. Uno de los extremos de una escalera telescópica de 60 metros es apoyado en la tierra a 4 metros de distancia de la base de un edificio. **¿A qué altura del edificio queda el otro extremo de la escalera?**

3) Completar la tabla según lo solicitado en ella. (Para efecto de cálculo, considere $\pi = 3$)

TIPS

El área de un círculo está dada por la expresión: $A = \pi r^2$, y su perímetro : $P = 2\pi r$



Área: $A = \pi r^2$

Perímetro: $P = 2\pi r$

Área de la circunferencia	Cálculo del radio	Longitud del radio
48 u^2	$A = \pi r^2 = 48$ Despejando r^2 $r^2 = \frac{48}{\pi} = \frac{48}{3} = 16$ $r^2 = 16 \,/\, \pm\sqrt{}$ $r = \sqrt{16} = 4$	$r = 4$
75 u^2		
108 u^2		
192 u^2		
507 u^2		

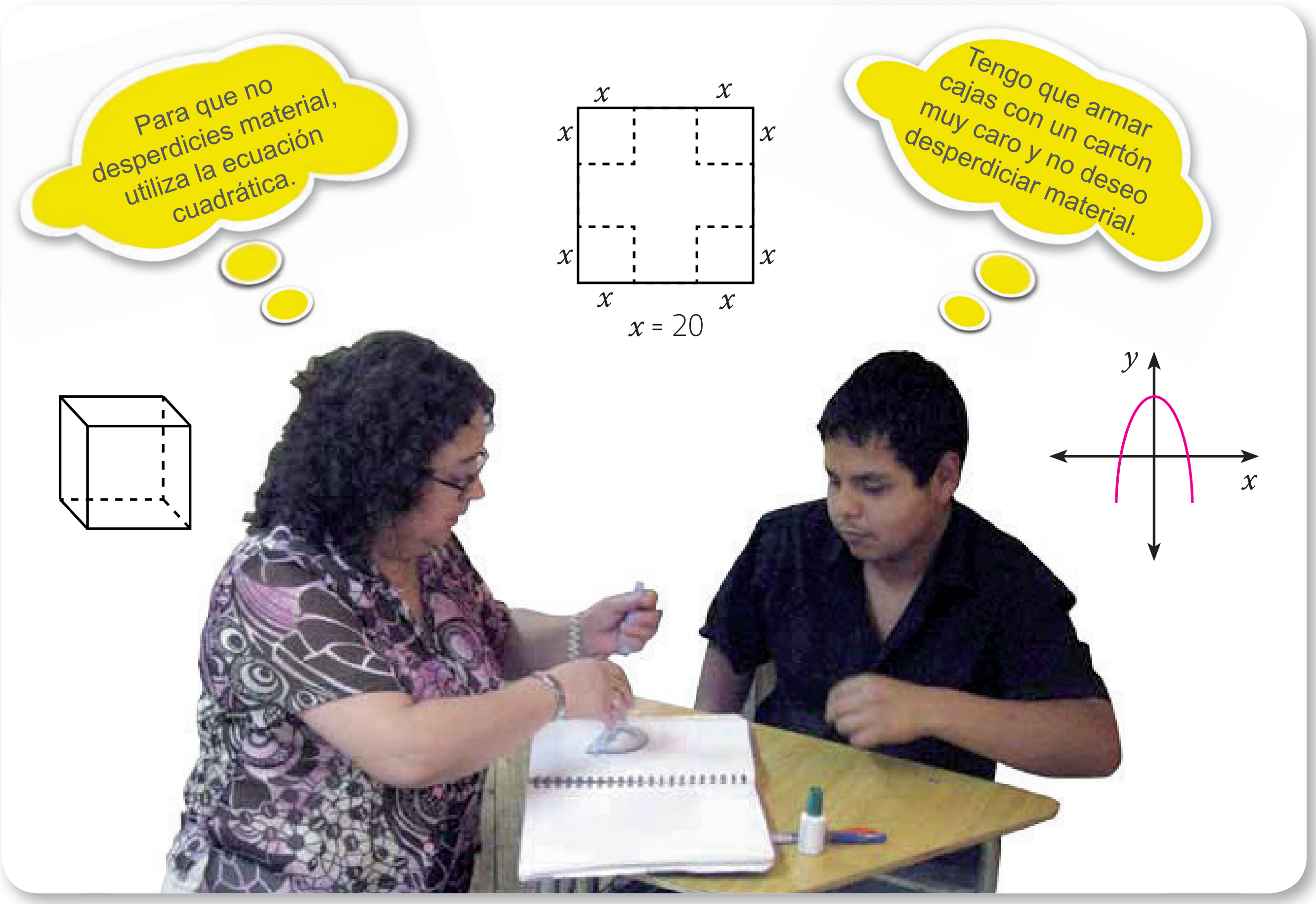
Actividad en el cuaderno

Calcule el perímetro de cada circunferencia considerando $\pi = 3$

Guía de trabajo Nº 2

Herramientas muy útiles

“La Ecuación Cuadrática”



Contenidos

Resolución de problemas simples, mediante el uso de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

TIPS

Hay diversos tipos de problemas y situaciones de la vida real que se pueden modelar y resolver utilizando ecuaciones cuadráticas, para lo cual es necesario saber: **¿qué es una ecuación cuadrática?, ¿qué tipo de ecuaciones cuadráticas existen?, ¿cuáles son las diferentes formas de resolver una ecuación cuadrática?, ¿cómo se modelan y resuelven problemas de la vida cotidiana utilizando las ecuaciones cuadráticas?**

¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA?

Sabemos que una ecuación es una relación matemática entre letras y números, el grado de la ecuación esta dado por el valor mayor del exponente de su incógnita, así podemos encontrar ecuaciones de primer grado, segundo grado o superior. Una ecuación cuadrática, será una ecuación en la cual el exponente de incógnita es dos y toma la forma de:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ejemplos:

a) $2x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $-x^2 + 20 = 0$

c) $\frac{x^2}{3} - 0{,}5x = 0$

d) $90 = -8t^2 + 60t$

f) $2x^2 - 288 = 0$

¿QUÉ TIPO DE ECUACIONES CUADRÁTICAS EXISTEN?

Podemos encontrar tres tipos de ecuaciones cuadráticas:

1) Ecuaciones cuadráticas puras.

2) Ecuaciones cuadráticas binomiales.

3) Ecuaciones cuadráticas completas.

1) Ecuaciones cuadráticas puras.

Son ecuaciones de la forma: $ax^2 - c = 0$, ($a > 0$, $c \geq 0$) o ($a < 0$, $c \leq 0$), la resolución de manera general es:

$$ax^2 - c = 0, \qquad a \neq 0$$

$$ax^2 - c = 0 \qquad / +c$$

$$ax^2 = c \qquad / \bullet \frac{1}{a}$$

$$x^2 = \frac{c}{a} \qquad / \pm\sqrt{}$$

$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$, por lo tanto existen dos soluciones: $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{c}{a}} \\ +\sqrt{\frac{c}{a}} \end{cases}$

TIPS

Comente con un compañero cómo se resolvió el siguiente ejercicio:

$$2x^2 - 2 = 0$$
$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = 1 \ / \pm\sqrt{}$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$x = \pm 1.$$

Por lo tanto existen dos soluciones:

$$x = -1 \text{ y } x = 1$$

Actividad en el cuaderno

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas puras:

a) $-3x^2 + 12 = 0$

b) $(x + 3)(x^2 - 2) = x + 3$

c) $-0{,}06x^2 + 6 = 0$

d) $\dfrac{9x^2 - 25}{4} = 0$

e) $(x + 5)^2 = 10x + 50$

f) $0{,}01x^2 - 0{,}64 = 0$

2) Ecuaciones cuadráticas binomiales.

Son ecuaciones con la forma $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$. la solución se obtiene de esta manera:

$ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$ /factorizando por x

$x = 0$ y $ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = \dfrac{-b}{a}$

(cambiar solo posición de la solución hacia la derecha)
Por lo tanto hay dos soluciones:

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{-b}{a},\ a \neq 0$$

TIPS

El producto de dos términos (factores) es igual a cero, si y solo si uno de sus términos es cero. Por lo tanto una de las soluciones o raíces de las ecuaciones cuadáticas binominales es siempre cero (0).

Ejemplo: $2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x - 3) = 0 \rightarrow x = 0$ y $2x - 3 = 0 \rightarrow \therefore\ x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$

ACTIVIDAD **Resuelva como en el ejemplo anterior:**

a) $12x - x^2 = 0$

b) $x^2 - 9x = 0$

c) $\dfrac{9x^2 - 7x}{4} = 0$

d) $6x - 0{,}06x^2 = 0$

e) $0{,}01x^2 - 0{,}1x = 0$

Actividad en el cuaderno

Resuelva el siguiente ejercicio: $(x + 5)^2 = 25$

3) Ecuaciones cuadráticas completas.

Las ecuaciones cuadráticas completas son de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

Para resolver este tipo de ecuaciones existen diversas maneras de hacerlo. En esta guía iniciaremos la resolución de estas ecuaciones, utilizando la fórmula cuadrática, fórmula que es aplicable a todos los tipos y formas de ecuaciones cuadráticas, debiendo hacer notar el tipo de raíz o solución que se obtiene.

Fórmula cuadrática: Si a ≠ 0 , las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ a \neq 0.$$

De esta expresión podemos separar sus raíces o soluciones de la siguiente forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación: $15x^2 + 7x - 2 = 0$

a) Identificar los coeficientes: $a = 15$, $b = 7$, $c = -2$

b) Valoración algebraica en la fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-2)}}{2 \cdot 15} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{30}$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{30} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5} \\ x_2 = \dfrac{-20}{30} = x\dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

TIPS

La expresión $b^2 - 4ac$ es:
$7^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-2) = 169 > 0$, es positiva,
luego la ecuación tiene 2 soluciones que
son números reales y distintos.

Actividad en el cuaderno

Resuelva las ecuaciones usando la forma cuadrática:

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$

b) $3x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$

c) $x^2 + x - 6 = 0$

d) $x^2 - 9.995x - 50.000 = 0$

e) $x^2 + 9x + 20 = 0$

f) $2x^2 + x - 3 = 0$

2) Resolver la ecuación: $12x^2 + 60x + 75 = 0$

a) Identificar los coeficientes: $a = 12$, $b = 60$, $c = 75$

b) Valoración algebraica en la formula cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \bullet 12 \bullet 75}}{2 \bullet 12} = \frac{-60 \pm \sqrt{3.600 - 3.600}}{24}$$

$$x = \frac{-60 \pm 0}{24} = \frac{-60^{:2}}{24^{:2}} = \frac{-30^{:6}}{12^{:6}} = \frac{-5}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-5}{2}$$

TIPS

La expresión bajo la raíz cuadrada es positiva, por lo tanto la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Actividad en el cuaderno

Resuelva las ecuaciones usando la fórmula cuadrática:

a) $x^2 + 8x + 16 = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$

d) $4x^2 - 3x + \dfrac{9}{16} = 0$

e) $x^2 - 8x + 16 = 0$

f) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

3) Resolver la siguiente ecuación: $x^2 + 3x + 5 = 0$

a) Identificar los coeficientes: $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$

b) Valoración algebraicamente en la fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \bullet 1 \bullet 5}}{2 \bullet 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

TIPS

La expresión bajo la raíz cuadrada es negativa, por lo tanto la ecuación no tiene soluciones reales.

c) Por lo tanto la ecuación no tiene soluciones reales.

Actividad en el cuaderno

¿ Que ocurre al intentar resolver estas ecuaciones con la fórmula cuadrática?

a) $x^2 + x + 6 = 0$

b) $9x^2 + x + 2 = 0$

c) $8x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$

d) $4x^2 - 3x + 3 = 0$

e) $x^2 - x + 16 = 0$

f) $x^2 + 2x + 5 = 0$

COMPARANDO MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

Analizaremos cómo las **ecuaciones cuadráticas puras y binomiales** resueltas por el modo sugerido general, se pueden resolver directamente aplicando la fórmula cuadrática y utilizando adecuadamente la valoración algebraica:

a) Método general sugerido

$$2x^2 - 2 = 0 \;/\; +2$$

$$2x^2 = 2 \;/\; \bullet \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 1 \;/\; \pm\sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

Dos soluciones:

$x = 1$ y $x = -1$

Fórmula cuadrática

Dada la ecuación: $2x^2 - 2 = 0$

Solución:

a) Identificar los coeficientes: $a = 2$, $b = 0$, $c = -2$

b) Valoración algebraica en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \bullet 2 \bullet (-2)}}{2 \bullet 2} = \frac{\pm\sqrt{16}}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{4} = 1 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = 1$ y $x_1 = -1$

b) Método general sugerido

$$2x^2 - 3x = 0$$

$x(2x - 3) = 0$ / factorizando por x

$$x = 0 \text{ y } 2x - 3 = 0 \;/\; \bullet \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{3}{2}$$

Dos soluciones:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{3}{2}$$

Fórmula cuadrática

Dada la ecuación: $2x^2 - 3x = 0$

Solución:

a) Identificar los coeficientes: a = 2,b = -3,c = 0

b) Valoración algebraica en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \bullet 2 \bullet 0}}{2 \bullet 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{4},\; x_1 = 0,\;\; x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \frac{3}{2}$$

Actividad en el cuaderno

1) Resuelva las ecuaciones por algún método:

a) $9y^2 - 16 = 0$

b) $m^2 - 9 = 0$

c) $(n + 5)^2 = 9$

d) $y^2 - 45 = 0$

e) $x^2 - 10x - 3 = 0$

f) $2m^2 + 3 = 6m$

g) $5x^2 + 2 = 2x$

h) $2d^2 + 4d + 1 = 0$

i) $- x^2 - 2x + 3 = 0$

2) Utilice calculadora para resolver estas ecuaciones:

a) $2{,}07\, x^2 - 3{,}79x + 1{,}34 = 0$

b) $5{,}13 + 7{,}27x - 4.31 = 0$

c) $0{,}0134\, x^2 + 0{,}0414x + 0.0304 = 0$

d) $0{,}543\, x^2 - 0{,}182x + 0{,}003 = 0$

DISCRIMINANTE

El número dado por la valoración de la expresión algebraica: $b^2 - 4ac$, se denomina discriminante de la ecuación cuadrática y sirve para determinar a qué conjunto numérico pertenecen las soluciones de la ecuación.

Discriminante: $b^2 - 4ac$	Tipo de soluciones de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
$b^2 - 4ac > 0$ (Discriminante positivo)	La ecuación tiene 2 soluciones que son números reales y distintos.
$b^2 - 4ac = 0$ (Discriminante cero)	La ecuación tiene 2 soluciones iguales, que es un único número real.
$b^2 - 4ac < 0$ (Discriminante negativo)	La ecuación no tiene soluciones reales, por lo que estas pueden ser uno o dos números complejos.

ACTIVIDAD **Completa la tabla de acuerdo a lo solicitado**

Ecuación cuadrática	Valor de los coeficientes	Calculo del Discriminante	Número de soluciones
$x^2 - 5x + 4 = 0$	$a = 1$ $b = -5$ $c = 4$	$(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$ $25 - 16$ 9	Dos soluciones reales distintas.
$4x^2 + 2x = -2$	$a =$ $b =$ $c =$		
$3x^2 - 27 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$x^2 - 27 = 0$	$a =$ $b =$ $c =$		
$x^2 - 3x = 12$	$a =$ $b =$ $c =$		
	$a = 0,5$ $b = 2$ $c = 3$		

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

La mayor utilidad de las herramientas matemáticas, como la ecuación cuadrática, es que nos ayudan a resolver problemas. A continuación encontrará una pauta de sugerencias con estrategias para resolver problemas que involucra una ecuación cuadrática. Se sugiere estudiar atentamente cada problema resuelto y luego intente resolverlo en su cuaderno.

TIPS

Estrategia para resolver problemas

1) Leer atentamente el problema, si no lo entendió: vuelva a leerlo las veces que considere necesario o bien coméntelo con su compañero. Lo que importa es que comprenda perfectamente lo que se le pide e identifique bien los datos.

2) Trazar dibujos o diagramas incorporando los datos conocidos e identificando los datos desconocidos.

3) Utilizar expresiones matemáticas que relacionen las cantidades conocidas con las desconocidas.

4) Plantear una ecuación que relacione las cantidades desconocidas con las conocidas.

5) Resolver la ecuación y escribir las soluciones de todas las partes requeridas del problema.

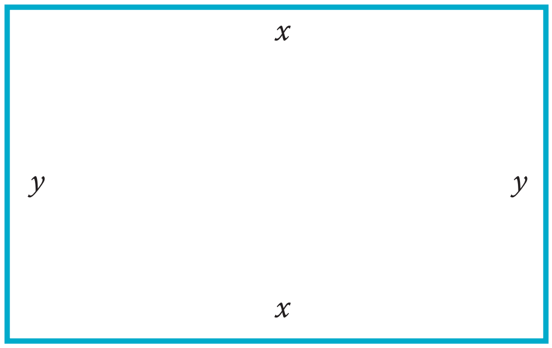
6) Verificar e interpretar las soluciones en términos del problema original.

Ejemplo:

1) Loreto y su esposo Ignacio, planifican hacer un almácigo de legumbres, por lo que utilizarán un pequeño espacio de terreno rectangular, determinar las medidas del terreno sabiendo que su perímetro es 76 metros y su área es 360 m^2.

Respuesta:

a) Dibuja de la situación descrita identificando el largo y el ancho del terreno:



b) Asignamos las letras x e y a las variables de largo y ancho del terreno

c) Los datos del problema, se escriben en un lenguaje algebraico que permita resolver el problema.
La información "su perímetro es 76" metro, permite escribir la expresión algebraica:

$2x + 2y = 76 \longrightarrow x + y = 38$

Y la información "su área es 360 m^2", permite escribir la expresión algebraica: $x \bullet y = 360$

d) Con ambas ecuaciones se construye un sistema que se resuelve fácilmente por sustitución:

$x + y = 38 \longrightarrow y = 38 - x$ / despejando y en función de x

$x \bullet y = 360 \longrightarrow x \bullet (38 - x) = 360$ / reemplazando y en función de x

$38x - x^2 = 360$ / multiplicando por x

$x^2 - 38x + 360 = 0$ / formando la ecuación cuadrática

Aplicando la fórmula cuadrática:

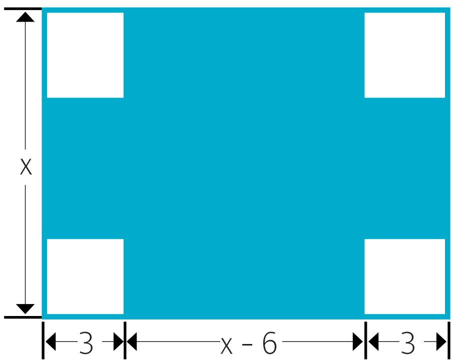
$$x = \frac{38 \pm \sqrt{(-38) - 4 \bullet 1 \bullet 360}}{2 \bullet 2} = \frac{38 \pm 2}{4} = \begin{cases} \frac{40}{2} = 20 \\ \frac{36}{2} = 18 \end{cases}$$

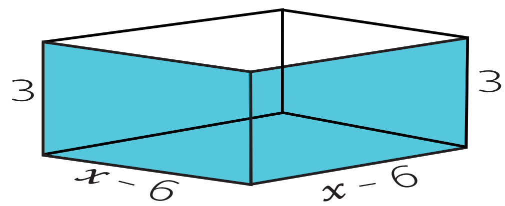
Respuesta:
∴ Las dimensiones del huerto serán: 20 m. de largo y 18 m. de ancho.
¿Por qué?

2) Un grupo de alumnos debe construir para tecnología una caja sin tapa a partir de un trozo cuadrado de plancha galvanizada, a la cual se le han cortado cuadrados de 3 pulgadas en las cuatro esquinas.
Si las pestañas que quedan se doblan hacia arriba. ¿Cuáles son las medidas del trozo de plancha galvanizado que se utilizo?

Respuesta:

a) dibujo de la situación descrita identificando todos los elementos:





b) Los datos del problema se escriben en un lenguaje algebraico que permita resolver el problema:
El volumen (V) de un paralelepípedo de base cuadrada se determina multiplacando: largo por ancho y por alto, en este caso $V = 3\,(x - 6)\,(x - 6) = 48$

$3 \cdot (x - 6)(x - 6) = 48$ / Simplificar por 3
$(x - 6)(x - 6) = 16$ / Simplificar por 3

c) Operando:
$x^2 - 12x + 36 = 16$ / para formar la operación cuadrática

$x^2 - 12x + 20 = 0$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \bullet 1 \bullet 20}}{2 \bullet 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \begin{cases} \dfrac{20}{2} = 10 \\ \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Respuesta:
∴ La longitud del trozo de plancha galvanizada que los alumnos deben utilizar originalmente es: 10 pulgadas de largo y de ancho. ¿Por qué?.

ACTIVIDAD **Resuelva cada situación planteada utilizando la ecuación cuadrática**

1) La base de una región triangular es 3 m. más larga que la altura. Si el área de la región triangular es 119 m^2, hallar la longitud de la base y la altura.

TIPS

Recuerda que el Área de un triangulo corresponde a:

$$Area = \frac{Base \cdot Altura}{2}$$

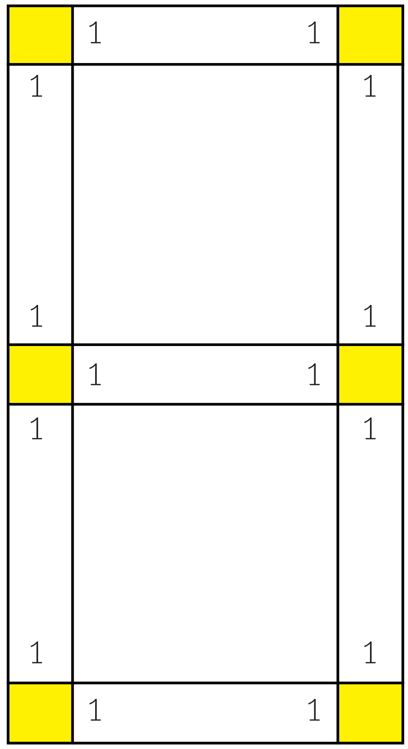
2) Un hojalatero debe construir una caja metálica abierta, para que recoja el pasto que va segando la máquina cortadora. La caja debe tener una base cuadrada, la altura de 10 cm, y una capacidad de 9.000 cm cúbicos. Determine el tamaño de la pieza cuadrada de zinc alum que debe cortar para construir la caja.

TIPS

Recuerda que Volumen de un paralepipedo corresponde a:

$$Volumen = Largo \cdot Ancho \cdot Alto$$

3) La Sra. Rosa Espinoza vende pizzas caseras. Para un pedido especial manda a hacer cajas cuadradas para las pizzas, a partir de una pieza rectangular de cartón, para lo cual corta cuadrados de 1 pulgada en cada una de las esquinas y en el centro, como se muestra en el dibujo, luego se doblan los lados formando la caja con un área de base de 144 pulgadas^2. **¿De qué tamaño tiene que ser la pieza de cartón?**



4) Un contador, determina que la ganancia quincenal: G, en pesos chilenos, de un artesano de joyas, obtenido por la producción y venta de x número de aros está dado por la función ingreso: $G = 375x - 0{,}25\ x^2$. Determinar cuántos aros deben fabricarse y venderse para obtener las ganancias dadas en la siguiente tabla:

Ganancia Quincenal (G)	0	$ 105.468,75	$140.625
Número de aros (x)			

Sugerencia: reemplace los valores de G, en la ecuación y resuelva la ecuación en cada caso.

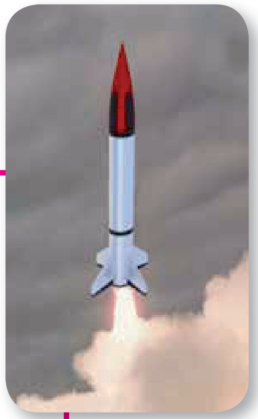
5) La suma de dos números es 23 y su producto 132, encuentre esos números.
Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones que permita determinar estos números:

6) Si el rectángulo de lados 40 cm y 20 cm, es aumentado de tal manera que su área original se duplica **¿cuáles serán las dimensiones del nuevo rectángulo?**

7) Un cohete se lanza verticalmente desde el suelo, con una rapidez inicial de 200 m/s. Su distancia Z respecto del suelo t segundos después de haberlo disparado (sin tomar en cuenta la resistencia del aire) está dada por $Z = 200t - 5t^2$

a) Encuentre el instante en que $Z = 0$
¿Qué interpretación física tienen los valores encontrados?

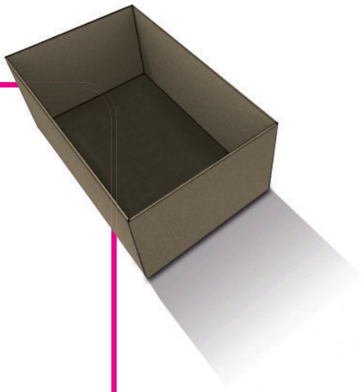
b) Encuentre el instante en que el proyectil está a 500 metros del suelo.



8) La longitud de la base rectangular de un edificio es 5 m. mayor que su ancho y el área que ocupa es 150 m^2.
Calcule sus dimensiones (largo y ancho).

9) Para cubrir un piso se usan 648 baldosas cuadradas. Si las baldosas fueran 1 cm. más largas por cada lado, se necesitarían 512 baldosas. **¿Cuál es la medida de la baldosa más pequeña?**

10) Con un cartón cuadrado se quiere construir una caja sin tapa. Al cartón se le corta un cuadrado de 3 cm. de lado en cada una de sus esquinas. Calcule la medida del lado del cartón, sabiendo que el volumen de la caja debe ser 192 cm^3.

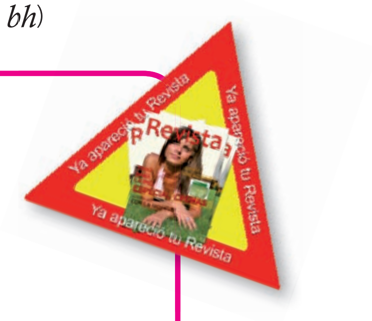


11) La suma de un número y su recíproco es $\frac{13}{6}$, encuentre dichos números.

12) Encuentre dos números cuya suma es 21 y su producto 104.

13) Encuentre los dos enteros positivos pares y consecutivos cuyo producto es 168.

14) Determinar el largo de la base y la altura de un letrero publicitario de forma triangular cuya área mide 2 metros^2. La base mide 3 metros más que la longitud de su altura ($A = \frac{1}{2} bh$)



15) Si la ecuación de costos para producir unos muebles de cocina tipo esquinero es $C(x) = x^2 - 10x + 31$. Donde C: es el costo de la producción de x unidades por semana (el costo en miles de pesos y las unidades en cientos). Determine:

a. La cantidad de unidades, para un costo correspondiente a \$ 1.000 semanales.
b. La cantidad de unidades, para un costo correspondiente a \$ 6.000 semanales.

EVALUACIÓN

Encierre en un círculo la letra de la alternativa correcta:

1) $\sqrt{144} + \sqrt{16}$ equivale a:

a. 160

b. 80

c. 20

d. 18

2) Para que la raiz de $\sqrt{(2n + 5)}$ de como resultado 5, n debe valer:

a. 0

b. 5

c. 10

d. 15

3) El área de un círculo es de 256 cm^2, entonces su radio mide:

a. 16

b. $16\,\pi$

c. $16\sqrt{\pi}$

d. $16\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

4) El número $\sqrt{2^{16}}$ es igual a:

a. 2^4

b. $\sqrt{32}$

c. $(\sqrt{2})^4$

d. 2^8

BIBLIOGRAFÍA:

1. Decreto Supremo (Ed.) Nº 211 de 2009.

2. Decreto Supremo (Ed.) Nº 257 de 2009.

3. Teoría de la Aritmética. Editorial LIMUSA S.A.

4. Álgebra y Trigonometría 2ª edición. (Dennis G Zill - Jacqueline M. Dewar)

5. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica 10ª edición. (Swokowski - Cole)

6. Álgebra y Trigonometría 3ª edición. (Raymond A. Barnett)

Sitios Web:

1. www.sectormatematica.cl

2. www.profesorenlinea.cl

3. www.educarchile.cl

4. www.yoestudio.cl

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile