Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Guía de Aprendizaje Nº 2

LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS:
UNA HERRAMIENTA DE MODELACIÓN

Educación Matemática

Segundo nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje Nº 2

LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS: Una herramienta de modelación

Educación Matemática
Segundo nivel o ciclo de Educación Media
Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Avda. Bernardo O'Higgins 1371, Santiago de Chile

Guía de Aprendizaje N°2

LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS: UNA HERRAMIENTA DE MODELACIÓN
Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media
Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Primera edición, año 2013
Inscripción Nº 223.860

Autores:
Mauricio Huircan Cabrera
Katherina Carmona Valdés

Colaboradores:
Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé,
María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo.
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:
Jose Luis Moncada Campos

Revisión editorial matemática:
Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Normalización de Estudios
División de Educación General

Impreso por:
RR Donnelley

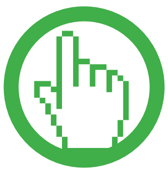
Año 2013
impresión de 99.000 ejemplares

Iconografía

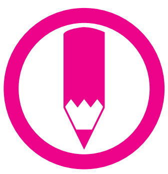
Información

Atención

Tips



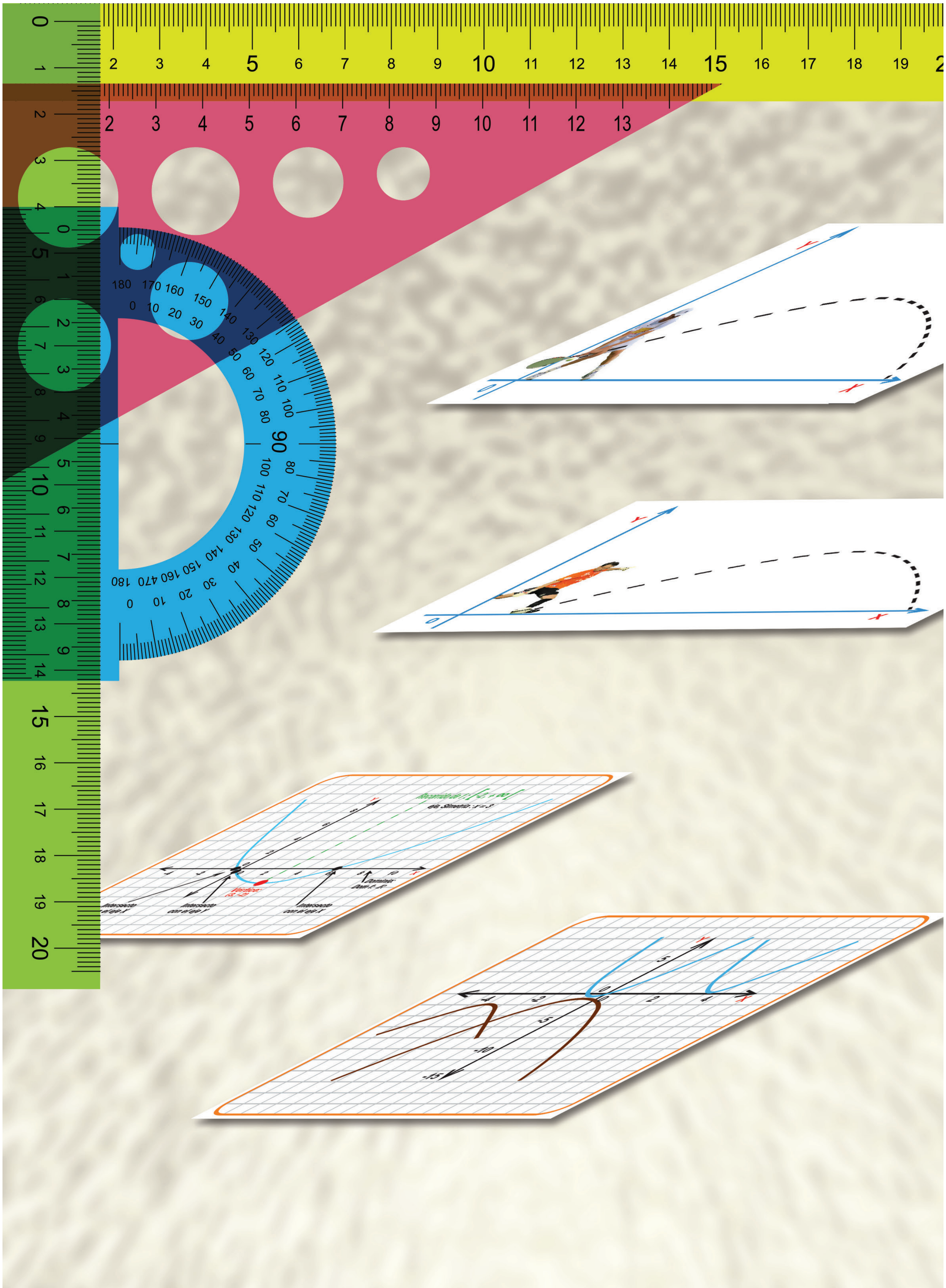
Página Web



Actividad

Actividad en el cuaderno

Evaluación



Presentación

Dado el fenómeno de la globalización, hoy en día cada persona recibe un sin número de mensajes escritos y hablados, en distintos lenguajes y códigos. Dentro de esta diversidad de lenguajes esiste el de las matemáticas; un lenguaje útil para modelar situaciones y resolverlas.

El material que la Coodinación Nacional de Normalización de Estudios, de la División de Educación General del Ministerio de Educación (Mineduc) pone a su disposición, entrega herramientas para comprender este lenguaje en el ámbito de las funciones cuadráticas.

La presente guía de aprendizaje está dividida en dos partes; En la primera, se inicia el trabajo desde la descripción gráfica de cada uno de los principales elementos de la función cuadrática, para luego explicar cómo se determinan estos elementos, (dominio, recorrido, orientación, vértice, ceros y ejes de símetria). Luego, con estas herramientas, se podrá desarrollar la segunda guía en la que se trabajan problemas aplicados de diversos ámbitos, que se pueden resolver través de funciones cuadráticas.

Esta guía pretende que cada estudiante comprenda que la función cuadrática es una herramienta matemática de gran utilidad para plantear situaciones o fenómenos que nos rodean. Para lograrlo es necesaria una adecuada comprensión de los contendidos y la aplicación de las estrategias de resolución de problemas que se entregan an las siguientes páginas. Se sugiere que el o la estudiante acuda al docente para aclarar dudas o procedimentos que no comprenda.

Guía de trabajo Nº 1

Función cuadrática

Contenidos:

- **Función cuadrática.**
- **Representación gráfica.**
- **Ecuación de segundo grado.**

FORMA ALGEBRAICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La forma general de una función cuadrática es la siguiente:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Las letras ***a***, ***b*** y **c** se llaman coeficientes de la función; la letra x representa la variable independiente y la expresión ***f(x)*** representa el valor obtenido al reemplazar ***x*** por algún valor en el lado derecho de la igualdad, es decir, ***f(x)*** es la imagen de ***x***. La expresión ***f(x)*** puede reemplazarse por la letra y que representa a la variable dependiente de la función. Así la expresión del recuadro anterior, también se puede escribir: $y = ax^2 + bx + c$

Ejemplos:

Algunas funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 5x - 2$

b) $y = -x^2$

c) $f(x) = \frac{x^2}{3} - 0{,}5x - 1$

d) $h(t) = -8t^2 + 60t$

e) $f(x) = 2(x-3)^2 + 3$

f) $y = 1 - 2t^2$

La forma algebraica de una función cuadrática tiene las siguientes características:
- Siempre hay un término que contiene la variable elevada al cuadrado. La mayoría de las veces esta variable se designa por la letra x, pero también se pueden usar otras, por ejemplo, t.
- La expresión del lado derecho es un polinomio que tiene por lo general 3 términos, pero también puede tener nada más que uno sólo como en el ejemplo ***(b)***; o solo 2 como en el ejemplo ***(f)***

A veces una función cuadrática no está dada en su forma general como es el caso del ejemplo ***(e)*** por lo que es necesario aplicar algún procedimiento algebraico para transformarla, así en ese ejemplo, $f(x) = 2(x-3)^2 + 3$ queda: $y = 2x^2 - 12x + 21$.

COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Como ya se dijo, en una función **cuadrática** de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, las letras a, b y c se denominan coeficientes; el coeficiente c de una función **cuadrática** se llama **constante.**

Ejemplo :

Dada la función: $f(x) = 2x^2 + 3x - 10$,

$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -10$

ACTIVIDAD **Identifique los coeficientes a, b y c de las siguientes funciones cuadráticas:**

a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 10$ $a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐	**d)** $f(x) = -2x^2 + 3x + 8$ $a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐
b) $f(x) = 2x^2 - 5x$ $a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐	**e)** $f(t) = -8t^2 + 32t$ $a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐
c) $f(x) = x^2 - 2$ $a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐	**f)** $y = 1 - 2t^2$ $a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐

EVALUACIÓN DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Evaluar una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, significa reemplazar el valor de x, por algún valor que pertenezca al dominio de la función.

Ejemplo:

Evaluar $f(x) = x^2 + 5x - 2$ en los valores dados:

Función	Valor de x a evaluar	Función evaluada
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = 0$	$f(0) = (0)^2 + 5(0) - 2 = -2$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = -1$	$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) - 2 = -6$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = 1$	$f(1) = (1)^2 + 5(1) - 2 = 4$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = -2$	$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) - 2 = -8$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = 2$	$f(2) = (2)^2 + 5(2) - 2 = 12$
$f(x) = x^2 + 5x - 2$	$x = a$	$f(a) = (a)^2 + 5(a) - 2 = a^2 + 5a - 2$

ACTIVIDAD **Complete las tablas evaluando cada función cuadrática:**

a) $f(x) = x^2 + 1$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = f(x) = x^2 + 1$	26							5			

b) $g(x) = x^2 - 4x + 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = g(x) = x^2 - 4x + 3$	24							3			

c) $h(t) = t^2 - 4t$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = h(t) = t^2 - 4t$				0		-4					

d) $f(x) = -x^2$

x	-1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
$y = f(x) = -x^2$				$\frac{-1}{4}$							-1

e) $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 0{,}5x - 1$

x	-1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1
$y = g(x) = \frac{x^2}{3} - 0{,}5x - 1$											

f) $h(t) = -8t^2 + 60t$

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$y = h(t) = -8t^2 + 60t$											

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

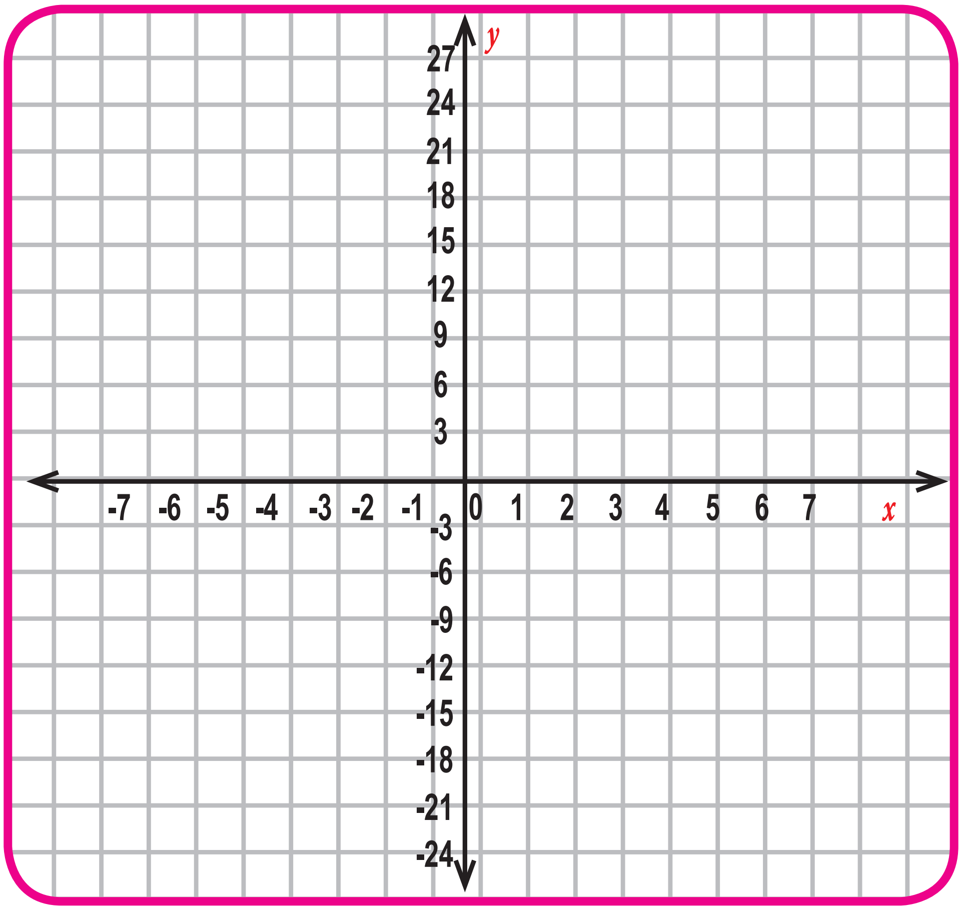
Descubriremos en general la forma típica de la gráfica de una función cuadrática mediante algunos ejemplos que usted deberá completar.

ACTIVIDAD

Complete las siguientes tablas, ubique los puntos en el plano cartesiano esbozando la gráfica de la función y responda:

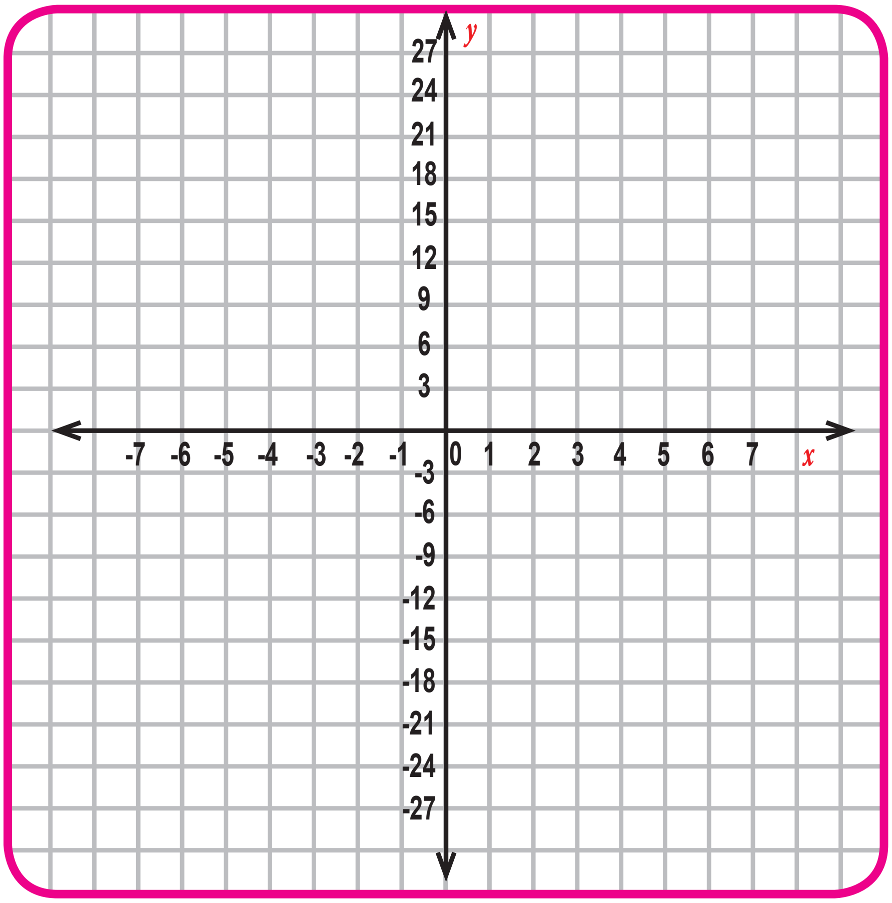
1) $f(x) = x^2$

x	$y = f(x) = x^2$	(x,y)
-5	25	(-5,25)
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



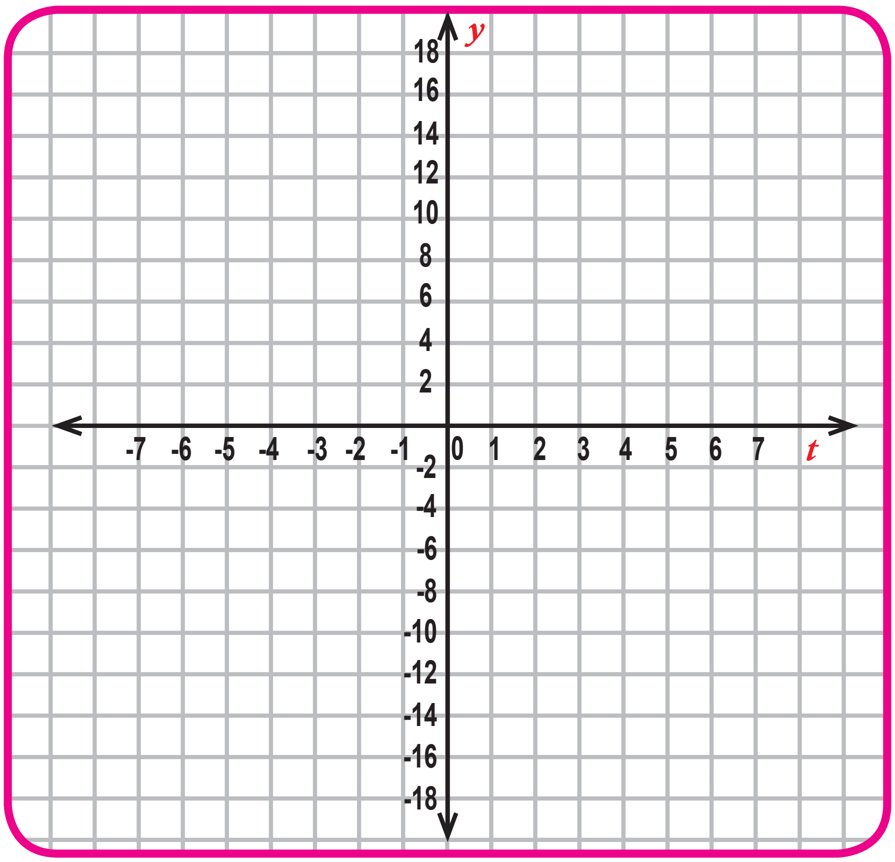
2) $h(x) = -x^2$

x	$y = h(x) = -x^2$	(x,y)
-5	-25	(-5,-25)
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		

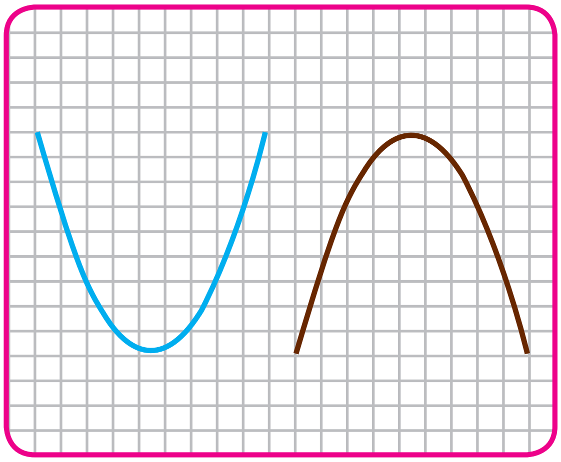


3) $h(t) = 16 - t^2$

x	$h(t) = 16 - t^2$	(x,y)
-5	-9	(-5,-9)
-4		
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



De acuerdo a los gráficos que se han obtenido se puede concluir que las gráficas de las funciones cuadráticas tienen una forma característica como se aprecia en la figura:

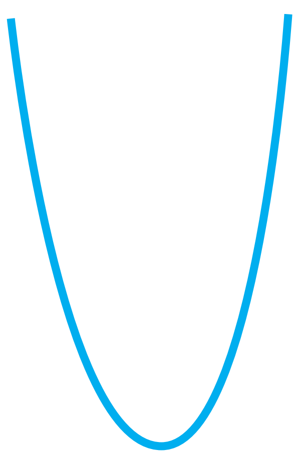
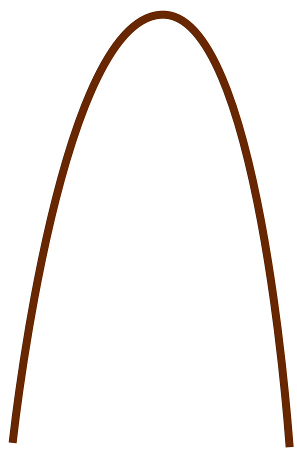


La forma representada se llama PARÁBOLA que corresponde al relieve que se puede observar en un cono una vez que este es cortado por un plano como se observa en esta otra figura:

ORIENTACIÓN O CONCAVIDAD DE LA PARÁBOLA

Como apreciamos, al esbozar la gráfica de la función cuadrática, esta se abre hacia arriba o hacia abajo, lo que está indicado por el signo del coeficiente a que acompaña a x^2, es decir, dada la función:

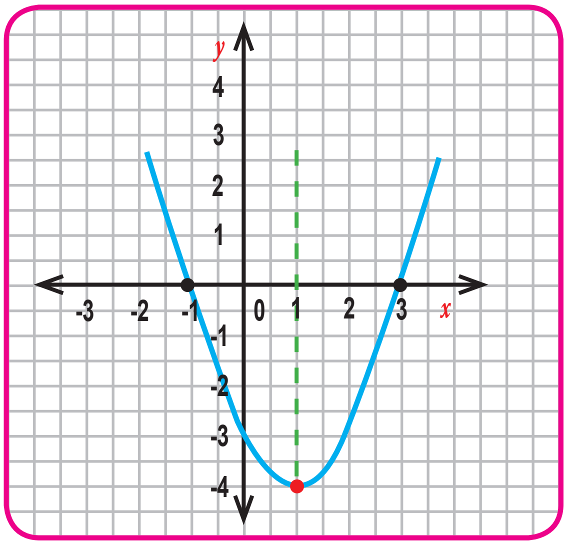
$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Si $a > 0$	**Si $a < 0$**
La parábola se abre hacia arriba, es decir, es **convexa**.	La parábola se abre hacia abajo, es decir, es **cóncava**.
	

Ejemplos:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $a = 1 > 0$

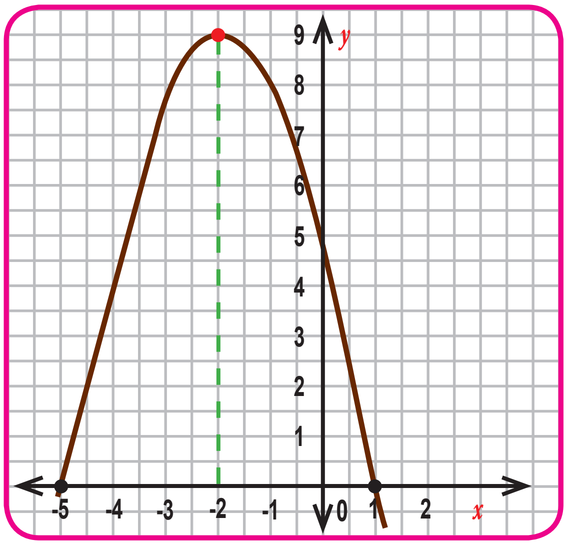
Esbozo



Orientación: Convexa

2) $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, $a = -1 < 0$

Esbozo



Orientación: Cóncava

ACTIVIDAD **Determine justificadamente si las gráficas de las funciones dadas en los ejemplos 1, 2 y 3 son cóncavas o convexas.**

Actividad en el cuaderno

Complete la tabla y esboce la gráfica:

t	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = f(t) = \frac{3}{4}t^2 - 3t$													

ACTIVIDAD **Observando las funciones cuadráticas, esboce la gráfica e identifique su orientación o concavidad:**

a) $f(x) = 2x^2 + 3$

Esbozo

Orientación

b) $f(x) = 4x + (2 - x)^2$

Esbozo

Orientación

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

Esbozo

Orientación

d) $f(x) = 12x - x^2$

Esbozo

Orientación

e) $f(x) = -x^2 - 6x + 13$

Esbozo

Orientación

f) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Esbozo

Orientación

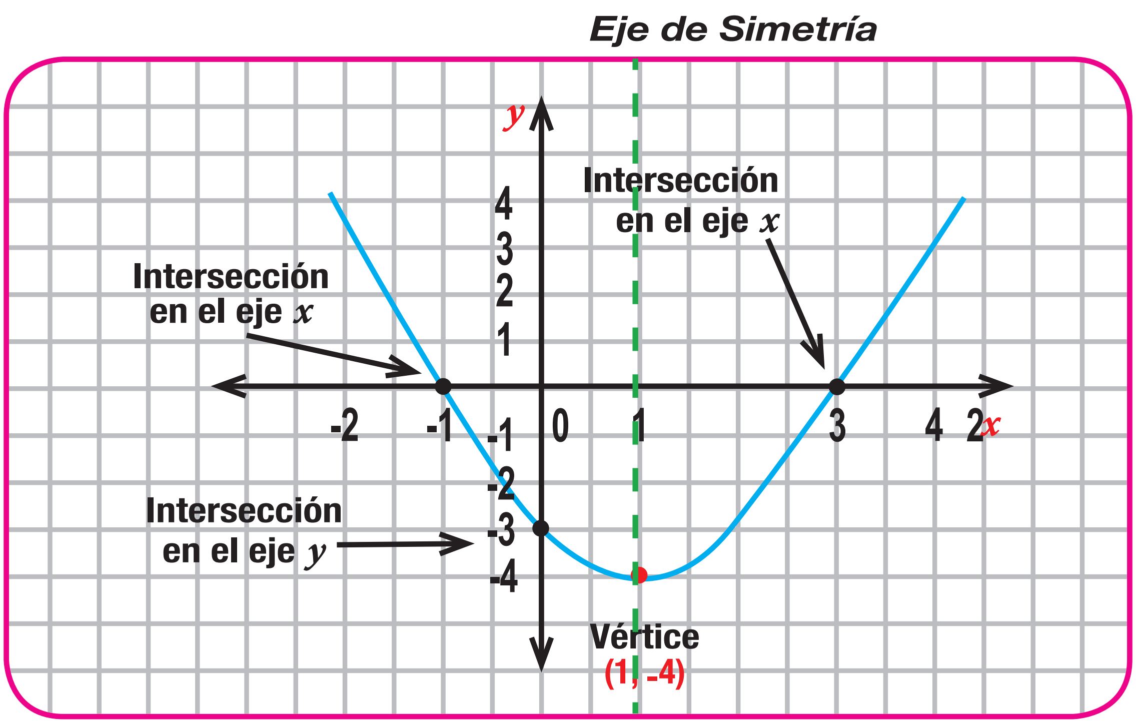
OTROS ELEMENTOS IMPORTANTES DE LA PARÁBOLA

En el gráfico de una parábola, además de su concavidad, se pueden apreciar los siguientes elementos importantes:

- Eje de simetría
- Vértice
- Intercepto o valor de intersección en el eje Y
- Ceros o valores de intersección en el eje X

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ a = 1 > 0$

Al graficar la función cuadrática dada, podemos observar el intercepto, los ceros, el vértice y el eje de simetría:



Geogebra es un *software* de matemática liberado, que permite construir gráficas interactivas de funciones. Puede descargarlo desde la siguiente página web: **www.geogebra.org**
Se sugiere graficar los ejercicios de esta guía con el software y comparar con las gráficas trazadas a mano.

EJE DE SIMETRÍA DE LA PARÁBOLA

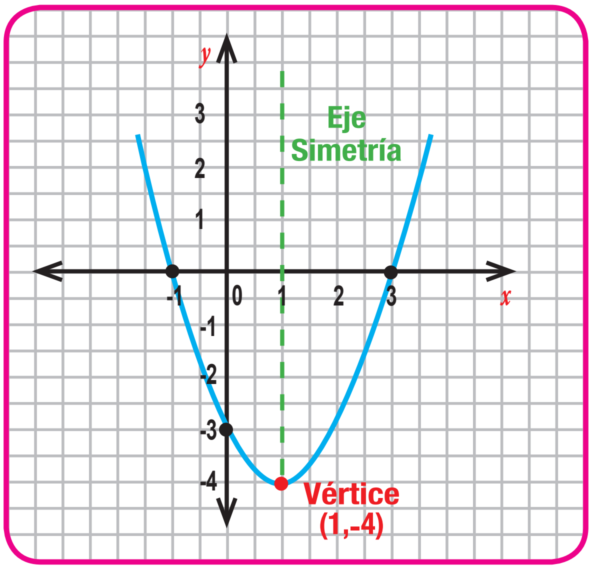
En el tipo de **funciones cuadráticas** que estamos estudiando: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; el **eje de simetría** es una recta vertical, paralela al eje y, que atraviesa la gráfica de manera que cada rama de ésta, separada por el eje, es el **"reflejo"** de la otra, asumiendo la idea de que éste simula un espejo. El eje de simetría intersecta a la parábola en el vértice y al eje X en el valor x que es la abscisa del vértice. La fórmula del valor x mencionado, conocida como **Ecuación del Eje de Simetría es:**

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Ejemplo

Observe cómo determinar el eje de simetría:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Como $a = 1, b = -2, c = -3$ calculamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la valoración de la expresión algebraica:

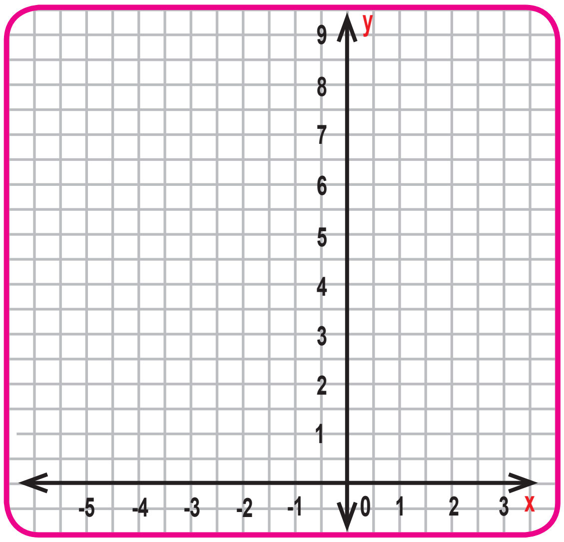
$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2)}{2 \bullet 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Eje de simetría $\boxed{x = 1}$

Determine y dibuje el vértice y el eje de simetría de la función, $f(x) = -x^2 - 4x + 5$; haga un esbozo de su gráfico apoyándose en una tabla de valores.

ACTIVIDAD



ACTIVIDAD **En cada una de las funciones cuadráticas, determine el eje de simetría:**

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Eje de simetría

d) $f(x) = 12x - 2x^2$

Eje de simetría

b) $f(x) = 2x^2 - 8x$

Eje de simetría

e) $f(x) = -x^2 - 12x + 3$

Eje de simetría

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Eje de simetría

f) $f(x) = 3x^2 - 15x + 6$

Eje de simetría

VÉRTICE DE LA PARÁBOLA

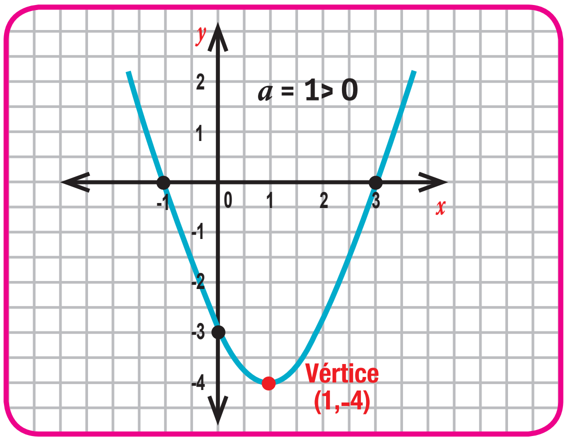
Al esbozar la gráfica de la función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ observamos que dependiendo de la orientación de la parábola, esta presenta un punto en el plano cartesiano, que es mínimo si se abre hacia arriba (cóncava), o máximo si se abre hacia abajo (convexa), este punto se denomina **vértice de la parábola** y se puede determinar a través de la expresión:

$$\boxed{V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)}$$

Ejemplo:

Observe detenidamente el cálculo del vértice de la parábola.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Los coeficientes son: $\boldsymbol{a = 1, b = -2, c = -3}$ determinamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la expresión:

$V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y de la evaluación algebraica:

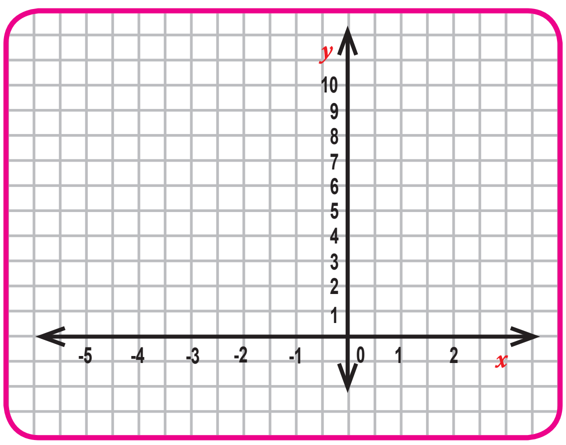
$\frac{-b}{2a} \rightarrow -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$, por lo tanto $\boldsymbol{x = 1}$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^2 - 2 \cdot \mathbf{1} - 3 = -4$

por lo tanto $\boldsymbol{y = -4}$

Vértice $\boxed{V(1, -4)}$

ACTIVIDAD **Aplique los pasos del ejemplo anterior, para determinar la gráfica, el vértice, dominio y recorrido de la función $f(x) = -x^2 - 4x + 5$**



ACTIVIDAD **En cada una de las funciones cuadráticas, determine su vértice, dominio y recorrido:**

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Vértice

b) $f(x) = 12x - 2x^2$

Vértice

c) $f(x) = 2x^2 - 8x$

Vértice

d) $f(x) = -x^2 - 12x + 3$

Vértice

e) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Vértice

f) $f(x) = 3x^2 - 15x + 6$

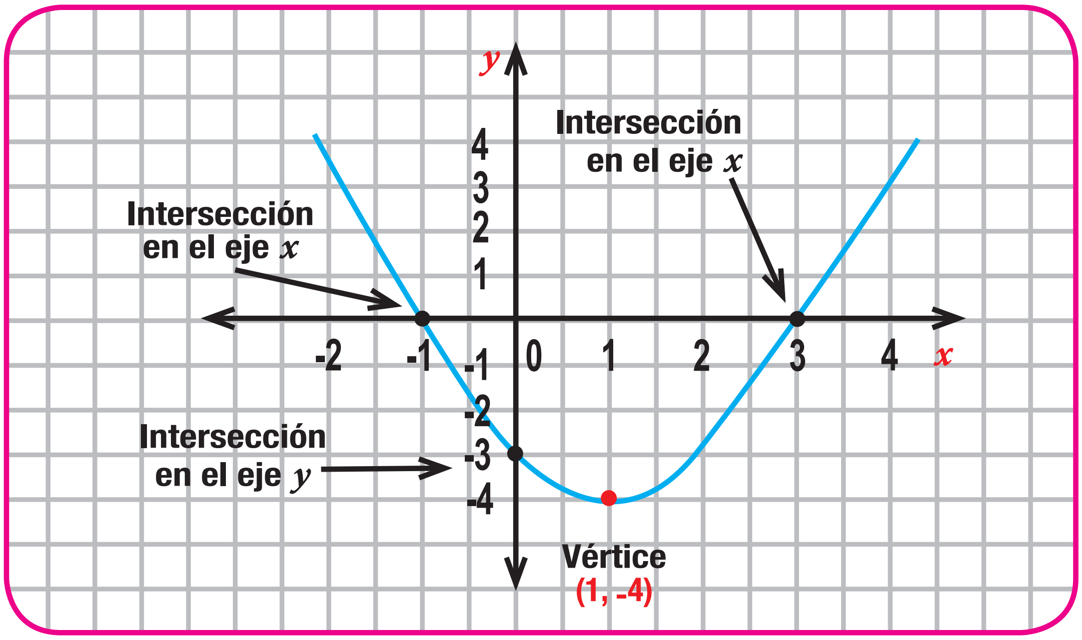
Vértice

INTERSECCIÓN CON LOS EJES: INTERCEPTO Y CEROS

1) INTERCEPTO: Se llama así al valor donde la gráfica de la función intercepta al eje y. Para determinar este valor se reemplaza x por 0 en la ecuación de la función. Así, $y = f(0)$ es el valor en que la gráfica corta al eje y. Es evidente que dada la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, c es el intercepto.

2) CEROS: Se llaman así a los valores donde la gráfica de la función intercepta al eje X. Para determinar la intersección con el eje x, se iguala la función a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática. Así, al hacer en la ecuación $y = 0$, y resolver $f(x) = 0$, se determinan los ceros de la función. La cantidad de ceros puede ser 2, 1 o 0, caso último en que la gráfica no intercepta al eje X.

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 2x - 3,\ a = 1 > 0$



1) Intersección con el eje y:

Se evalúa x = 0. Luego:

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$

$\therefore$ La intersección con el eje y es $(0,-3)$

2) Intersección con el eje y:

Al igualar a cero la función cuadrática se obtiene la ecuación cuadrática: $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$, que resolvemos usando la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad a = 1; \quad b = -2; \quad c = -3$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

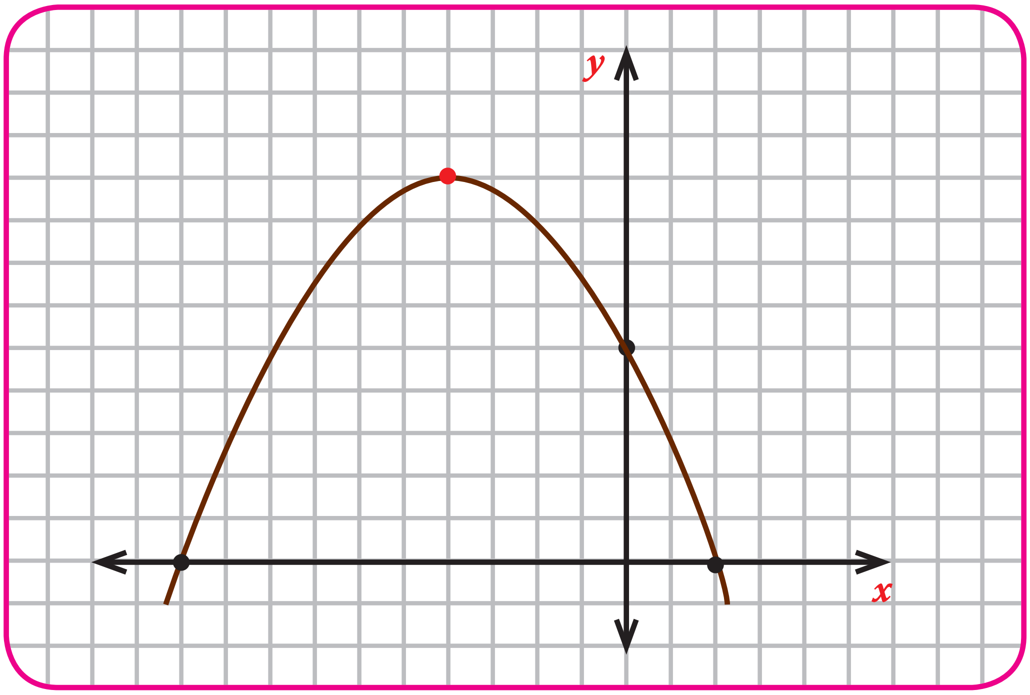
$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\therefore$ Las intersecciones con el eje x son:

$(3, 0)$ y $(-1, 0)$

ACTIVIDAD

Determine las intersecciones con los ejes de la parábola dada por $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, $a = -1 < 0$



- **Intersección con el eje x:**

- **Intersección con el eje y:**

ACTIVIDAD

En cada una de las funciones cuadráticas, determine las intersecciones con sus ejes:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Intersecciones eje x

Intersección eje y

b) $f(x) = 2x^2 - 8x$

Intersecciones eje x

Intersección eje y

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Intersecciones eje x

Intersección eje y

d) $f(x) = 12x - 2x^2$

Intersecciones eje x

Intersección eje y

e) $f(x) = -x^2 - 12x + 3$

Intersecciones eje x

Intersección eje y

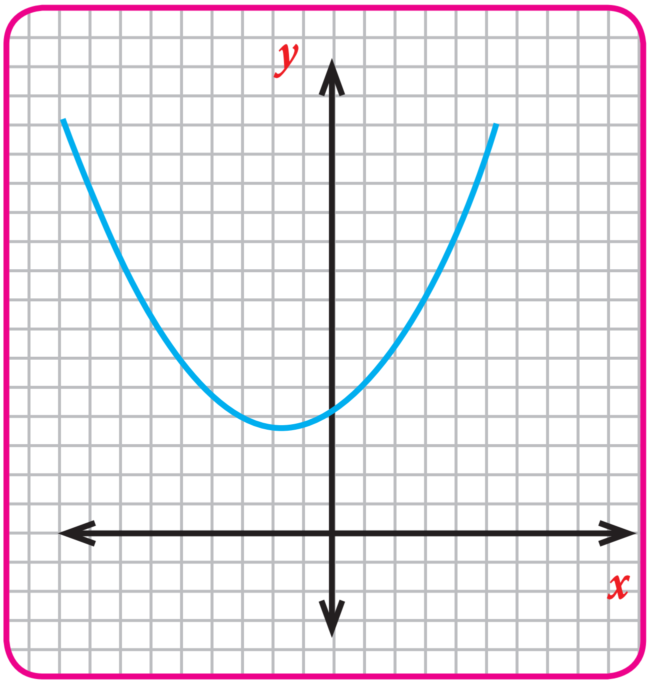
f) $f(x) = 3x^2 - 15x + 6$

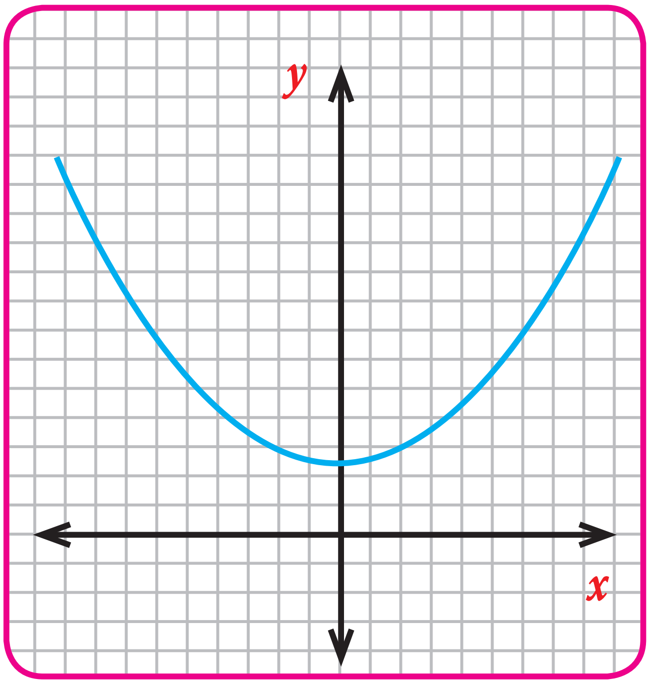
Intersecciones eje x

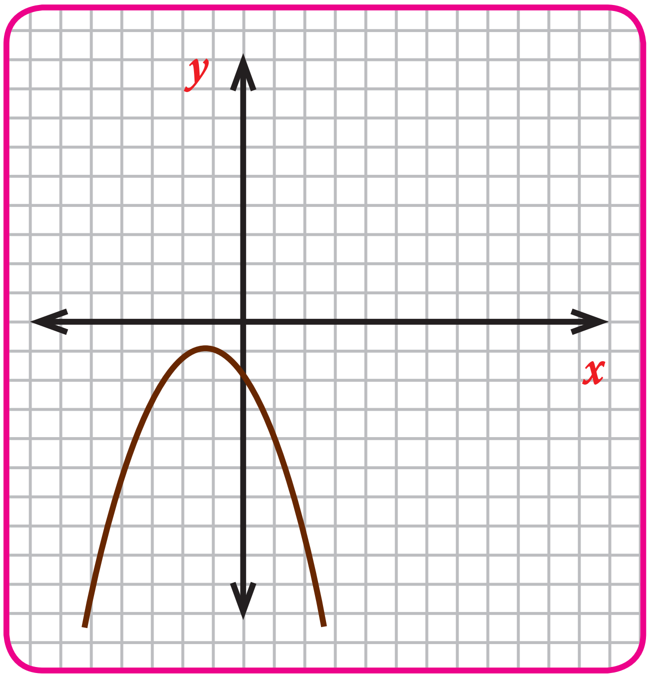
Intersección eje y

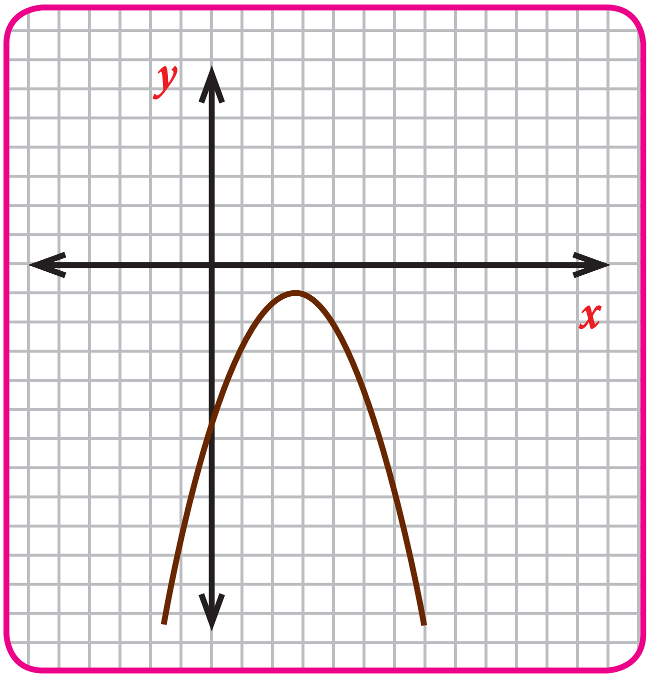
PARÁBOLAS SIN INTERSECCIÓN CON EL EJE x

- Dentro de las funciones cuadráticas que estamos estudiando, nos encontramos con parábolas que **no tienen intersecciones con el eje x**, es decir, **solo poseen intersección con el eje y**, y su gráfica corresponderá a algunas de las siguientes formas:









PROCESO ALGEBRAICO PARA DETERMINAR SI UNA FUNCIÓN POSEE INTERSECCIONES CON EL EJE x.

Algebraicamente, se puede determinar rápidamente si una función tiene, o no, intersecciones con el eje x. Para ello, basta analizar el signo del **DISCRIMINANTE.**

En la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$
la expresión algebraica del discriminante es:
$b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac < 0$ (Discriminante negativo)	La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces que sean números reales, por lo que la solución corresponde a dos números complejos. La gráfica de la función no intersecta al eje x.
$b^2 - 4ac = 0$ (Discriminante cero)	La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real. La gráfica intersecta al eje x en un punto (el vértice)
$b^2 - 4ac > 0$ (Discriminante positivo)	La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene 2 raíces o soluciones reales. La gráfica de la función intersecta 2 veces al eje x.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 + 3x + 5$, determinar si posee intersecciones con el eje x

Primero identificamos los coeficientes: $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$

Luego valoramos algebraicamente la expresión discriminante:

$$b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11$$

La expresión **discriminante** es negativa, por lo que determinamos que la ecuación no tiene raíces reales, por lo tanto la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 5$, no intersecta al eje x.

ACTIVIDAD

En cada una de las siguientes funciones cuadráticas, determine si hay intersecciones con los ejes coordenados y las coordenadas de estas, en el caso de haberlas.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

Número de coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas del punto de intersección con el eje y

b) $f(x) = x^2 + 2$

Número de coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas del punto de intersección con el eje y

c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$

Número de coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas del punto de intersección con el eje y

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$

Número de coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas del punto de intersección con el eje y

e) $f(x) = -x^2 - 8$

Número de coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas del punto de intersección con el eje y

f) $f(x) = -x^2 + 6x - 11$

Número de coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas de los puntos de intersección con el eje x

coordenadas del punto de intersección con el eje y

RANGO O RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El rango o recorrido son los valores determinados para la variable dependiente y. Se determina conociendo la coordenada de la ordenada del vértice, además de la orientación de la parábola.

En forma general: Dada la función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ podemos observar lo siguiente:

Si $a > 0$, el recorrido o rango de f es:

$$\text{Rec } f: \left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$$

Si $a < 0$, el recorrido o rango de f es:

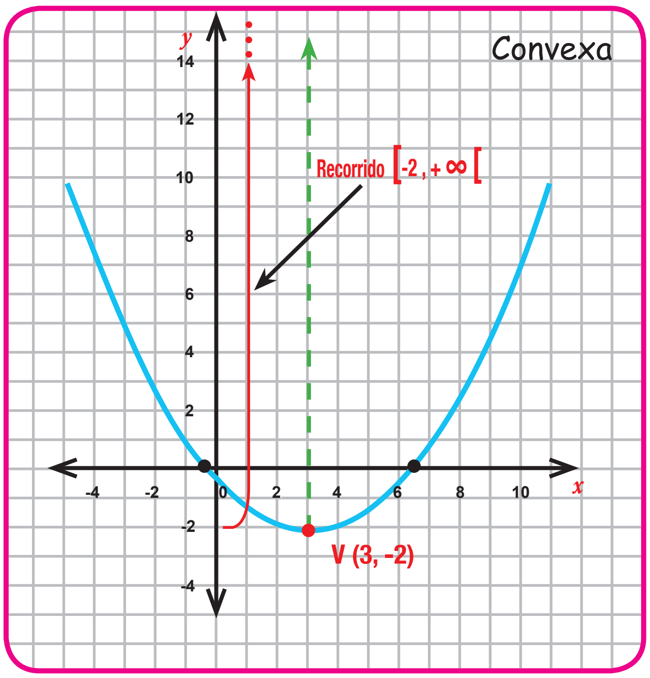
$$\text{Rec } f: \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$$

TIPS

Para determinar el recorrido teniendo la gráfica, debe observar atentamente el eje y desde el vértice.

Ejemplos:

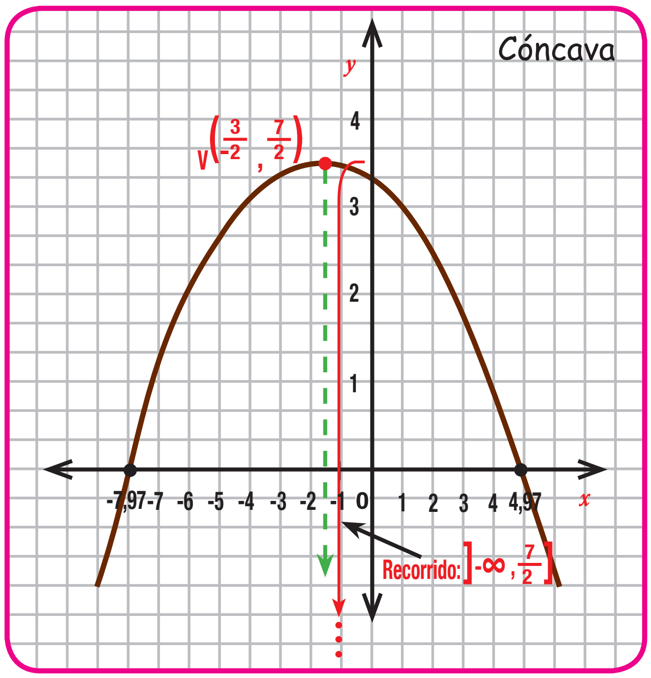
1)



La coordenada y del vértice es **−2** y la parábola es convexa (⋃), por lo tanto el recorrido es:

$$\text{Rec } f: \left[-2, +\infty\right[$$

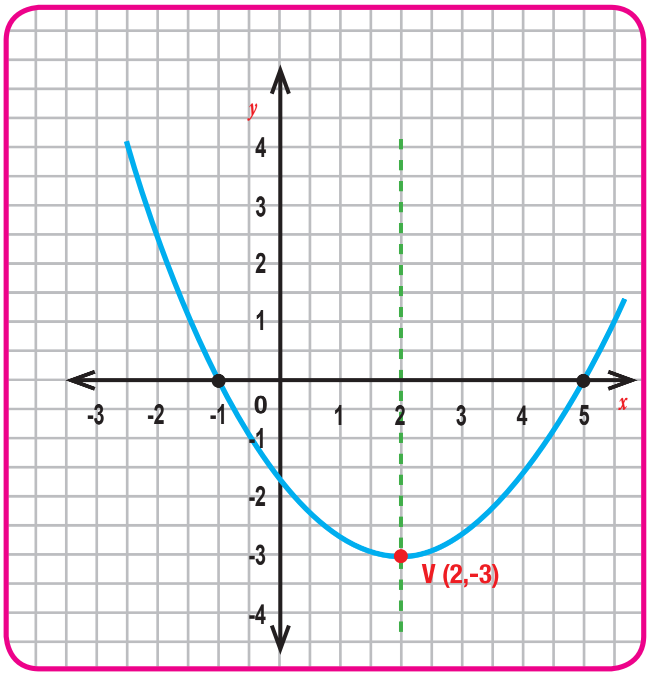
2)



La coordenada y del vértice es $\mathbf{\frac{7}{2}}$ y la parábola es cóncava (⋂), por lo tanto el recorrido es:

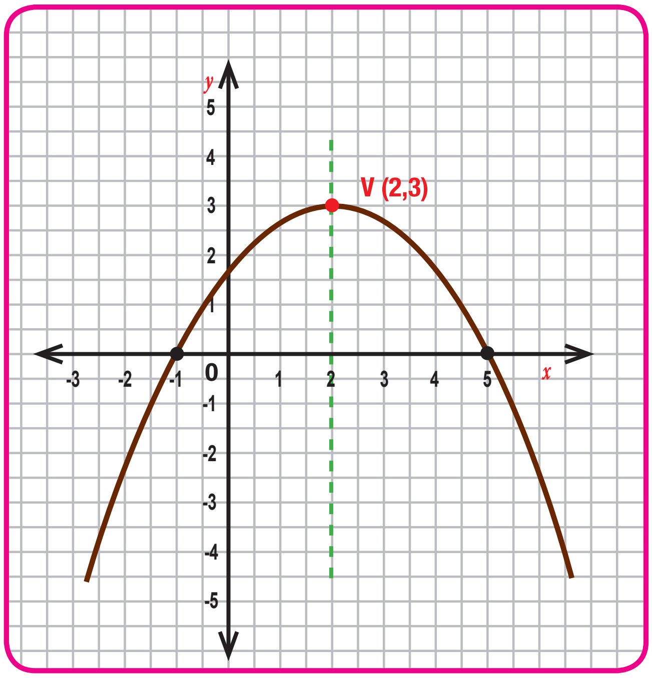
$$\text{Rec } f: \left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$$

ACTIVIDAD **Dada la gráfica de las funciones cuadráticas, determine su dominio y recorrido.**



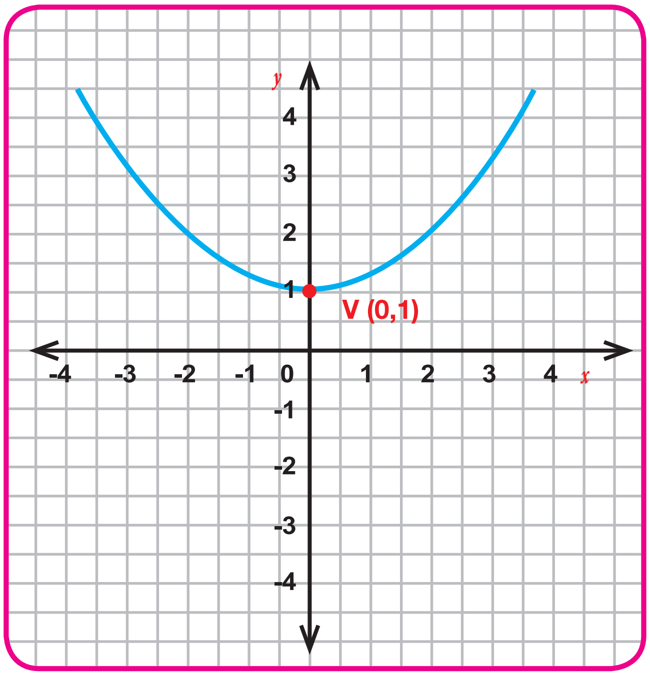
Dominio:..

Recorrido:..



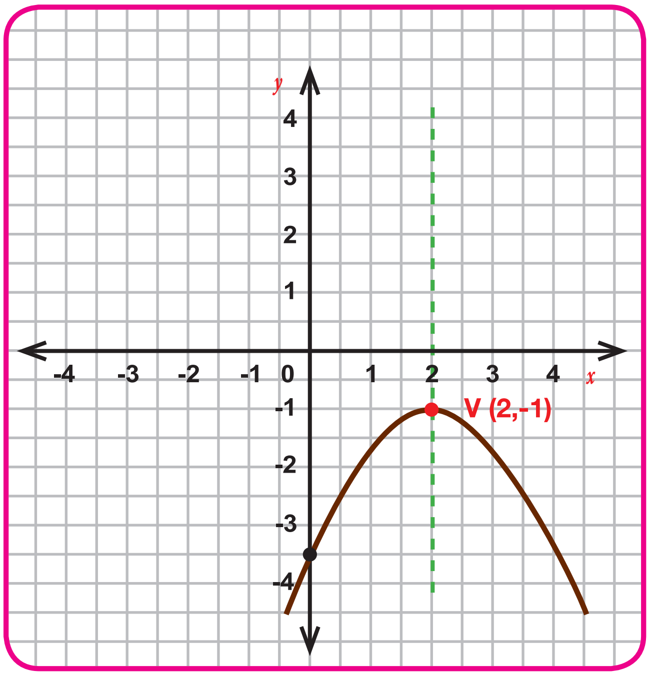
Dominio:..

Recorrido:..



Dominio:..

Recorrido:..



Dominio:..

Recorrido:..

EVALUACIÓN

Aplique lo aprendido para resolver los siguientes ejercicios:

1) Valorando la función: $f(x) = x^2 - 8x + 7$ complete la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	7				-9				7

Con los datos de la tabla anterior grafique la función en su cuaderno identificando en ella todos sus elementos.

2) Grafique las siguientes parábolas en su cuaderno y determine: Orientación o concavidad, vértice, ceros y eje de simetría.

a) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$

Orientación

Eje de simetría

Vértice

Intercepto

Ceros

Dominio

Recorrido

c) $y = -x^2 + 4$

Orientación

Eje de simetría

Vértice

Intercepto

Ceros

Dominio

Recorrido

b) $y = -x^2 - 2x + 8$

Orientación

Eje de simetría

Vértice

Intercepto

Ceros

Dominio

Recorrido

d) $y = -2x^2 + 12x$

Orientación

Eje de simetría

Vértice

Intercepto

Ceros

Dominio

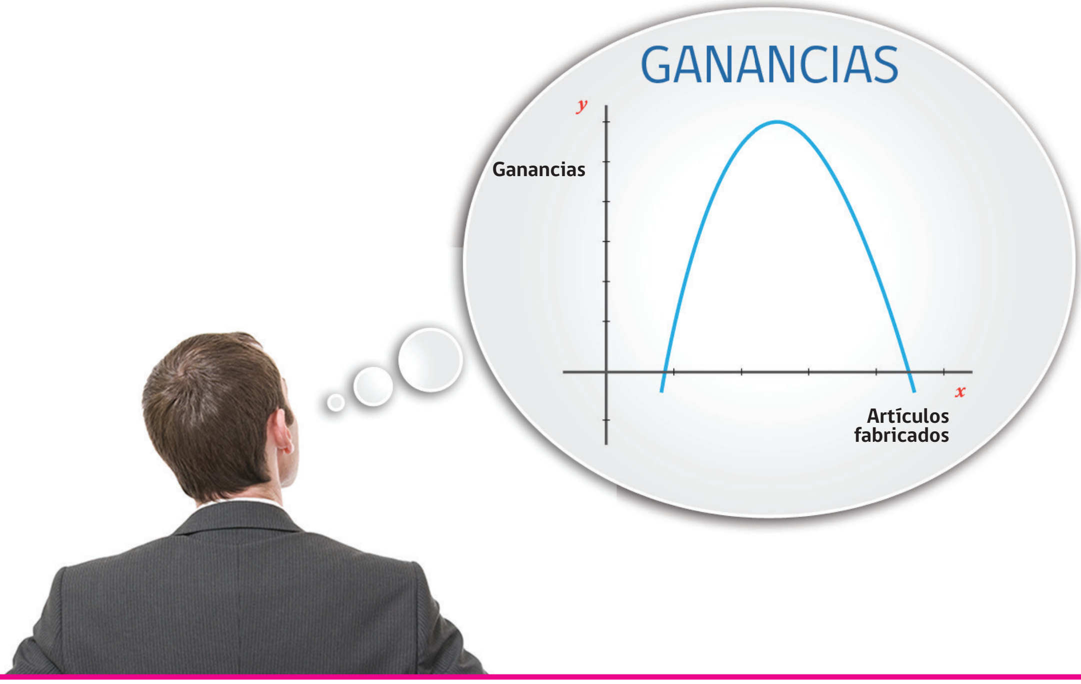
Recorrido

Guía de trabajo Nº 2

La función cuadrática y sus aplicaciones

TIPS

Dado que la gráfica de una función cuadrática es una parábola de forma cóncava (∩) o convexa (∪), siempre será posible su valor mínimo o máximo. Esto es muy útil en situaciones tales como maximizar utilidades o minimizar costos entre otras.



Contenidos

- **Análisis de situaciones en diversos ámbitos que pueden ser modeladas a través de funciones cuadráticas.**
- **Maximizar o minimizar diversas situaciones tales como costos, ganancias, ventas, etc.**
- **Problemas físicos, como por ejemplo el lanzamiento de proyectiles.**

ACTIVIDAD **A continuación, se presentan seis ejercicios en los cuales se han omitido algunos pasos, complételos utilizando los elementos de las funciones cuadráticas**

1) Un malabarista lanza hacia arriba tres pelotas, cada una de ellas se desplaza siguiendo una trayectoria que cumple con la gráfica de la función cuadrática:

$$f(x) = -12x^2 + 96x + 100$$

donde $f(x)$ indica la altura (en centímetros) alcanzada por las pelotas al cabo de x segundos de transcurrido el lanzamiento.

a) ¿Cuánto tiempo tarda una pelota en alcanzar su altura máxima?

El tiempo que tarda una pelota en alcanzar su altura máxima lo entrega la coordenada x del vértice de la función $f(x) = -12x^2 + 96x + 100$

Determínela:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza cada pelota?

La altura máxima está dada por la coordenada y del vértice de la función $f(x) = -12x^2 + 96x + 100$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) \rightarrow f\left(\boxed{}\right) = -12 \bullet \boxed{}^{2} + 96 \bullet \boxed{} + 100 = \boxed{}$$

c) ¿Qué altura alcanza una pelota transcurridos dos y seis segundos desde su lanzamiento?

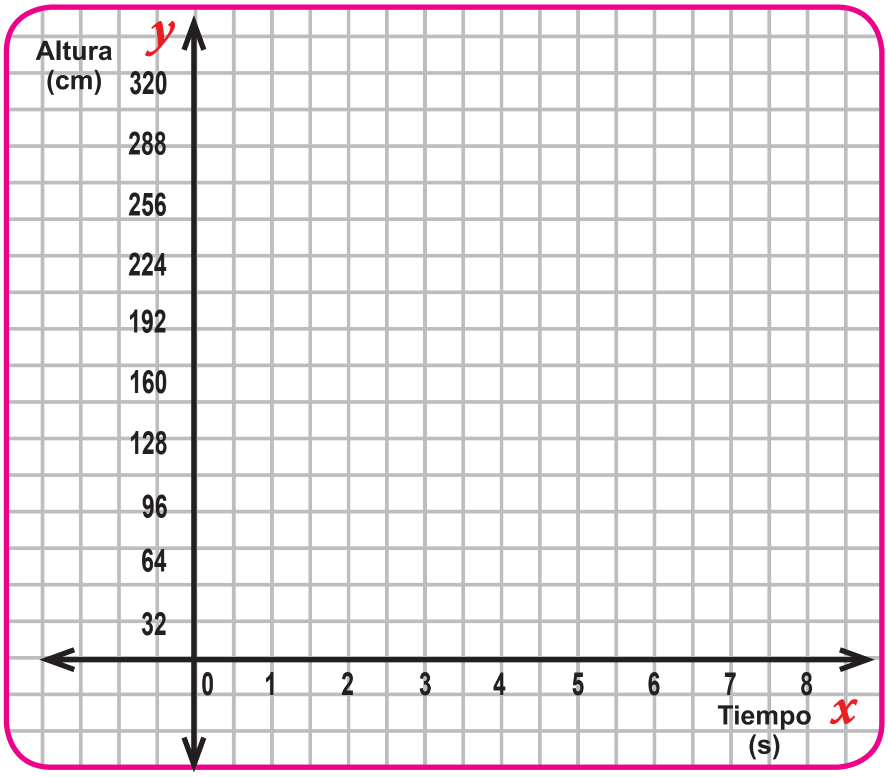
$f(2) \rightarrow f(2) =$ ☐ → La pelota alcanza una altura de ☐ cm transcurridos dos segundos de su lanzamiento.

$f(6) \rightarrow f(6) =$ ☐ → La pelota alcanza una altura de ☐ cm transcurridos seis transcurridos dos segundos de su lanzamiento.

d) Complete la siguiente tabla con la altura de la pelota en cada instante indicado:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (cm)									

e) Grafique la función $f(x) = -12x^2 + 96x + 100$ para visualizar el "vuelo de la pelota".



f) ¿Cuál es el tiempo de «duración del vuelo» de una pelota?

Para determinar el tiempo de vuelo de una pelota, usted debe considerar que el tiempo que demora en alcanzar su máxima altura, es el mismo que emplea en descender, por lo tanto el tiempo de vuelo de una pelota es: ☐ segundos.

TIPS

Observe el gráfico para responder.

2) El rendimiento de combustible de un automóvil se obtiene de acuerdo a la velocidad con la que se desplaza, si x es la velocidad medida en kilómetros por hora (km/h), el rendimiento está dado por la función:

$$R(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{7}{2}x, \text{ para } 0 < x < 120$$

a) Completar la siguiente tabla de rendimiento:

Velocidad en km/h	20	40	60	70	80	100
Rendimiento $R(x)$						

b) ¿A qué velocidad se obtiene el máximo rendimiento?

La respuesta esta dada por la coordenada x del vértice de la función $R(x)$

Determínela:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

Por lo tanto, la velocidad que permite un mayor rendimiento de combustible es: $\boxed{}$ km/h

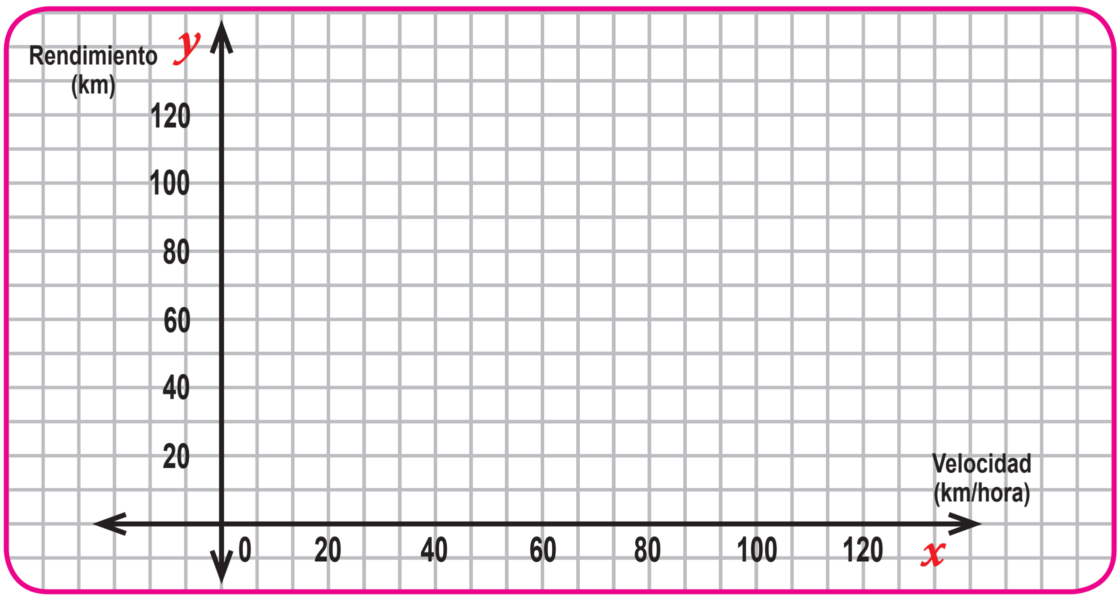
c) ¿Cuál es el máximo rendimiento?

El máximo rendimiento de combustible está dado por la coordenada y del vértice de la función $R(x)$.

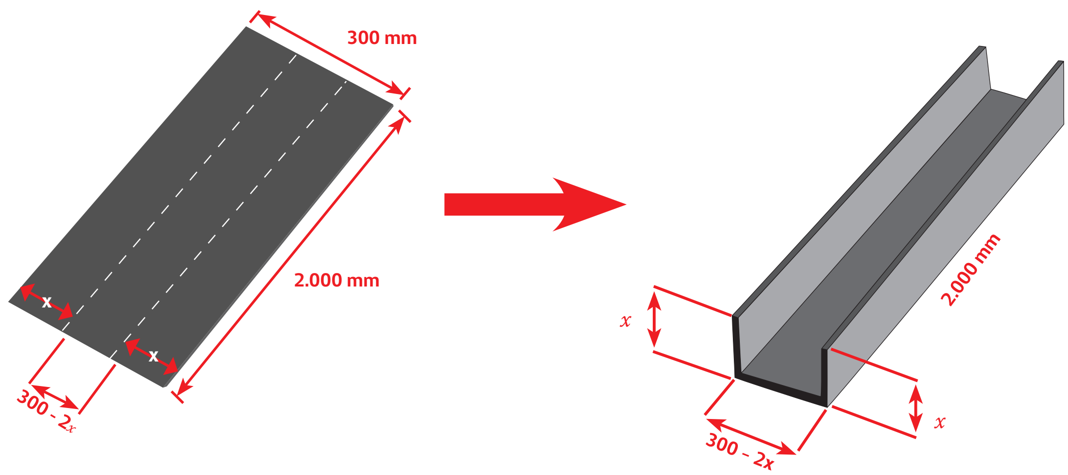
Determínela:

$$R\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow R(\boxed{}) = -\frac{1}{40}\cdot\boxed{}^2 + \frac{7}{2}\cdot\boxed{} \rightarrow R(\boxed{}) = \boxed{}$$

d) Graficar la parábola que modela la situación.



3) Para hacer una canaleta con un pedazo de plancha de zincalum liso de 2000 mm de largo y 300 mm de ancho, se dobla hacia arriba algunos milímetros a cada lado, como muestra la figura:



(x : cantidad de milímetros a doblar para hacer la canaleta.)

a) ¿Cuántos milímetros deben doblarse para que la canaleta de 300 mm de ancho tenga una capacidad máxima?

Se plantea la función que modela la capacidad volumétrica que tendrá la canaleta, la que calcularemos multiplicando el **largo · alto · ancho** . 35

$$V(x) = 2.000 \cdot x \cdot (300 - 2x) \rightarrow V(x) = 600.000x - 4.000\,x^2$$

Gráficamente es una parábola convexa, lo que implica que su vértice es el punto máximo.

Determine la coordenada x del vértice

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{\square}{\square} = \square$$

Esto nos indica que debemos doblar $\square$ milímetros de plancha a cada lado, para hacer la canaleta con máxima capacidad volumétrica.

b) ¿Cuál es la máxima capacidad volumétrica?

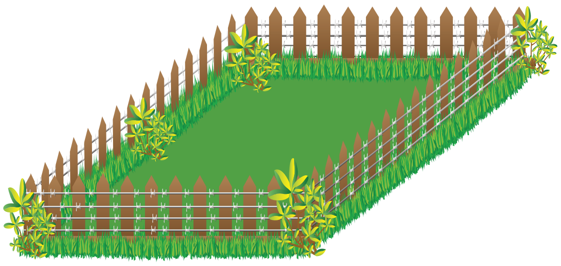
La máxima capacidad volumétrica está dada por la coordenada y del vértice de la función $V(x)$

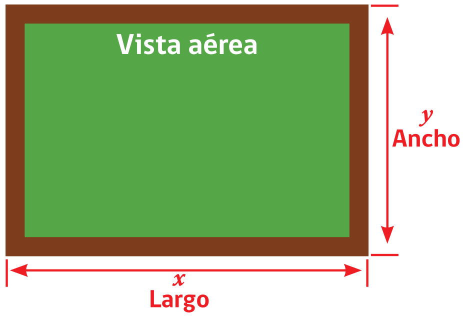
$$V\left(\frac{-b}{2a}\right) \rightarrow V(\square) = 600.000 \cdot \square - 4.000 \cdot \square^2 = \square$$

Actividad en el cuaderno

¿Cuántos milímetros deben doblarse a cada lado de un pedazo de plancha de zincalum liso de 350 mm de ancho y de 2.000 mm de largo, para hacer canaletas con la máxima capacidad posible?

4) Un agricultor debe cercar en forma rectangular un pedazo de un potrero. Para ello compró 4.000 metros de alambre de púas que debe disponer en cuatro líneas como se muestra en la siguiente imagen:





¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno a cercar para que su área sea máxima?

Para encontrar las dimensiones utilizaremos como ecuación auxiliar, la expresión que representa el perímetro de la plantación rectangular:

$2x + 2y = 1.000$

$x + y = 500$

$y = 500 - x$

TIPS

$2x + 2y = 1.000$ porque el alambre de púas se debe cortar en cuatro partes iguales para dar cuatro vueltas al terreno.

Entonces el área del terreno, que es largo · ancho, se expresa como: Área = f(x) = x · (500 – x), es decir, f(x) = – x² + 500x

El largo para obtener el área máxima, está dado por la coordenada x del vértice de la función:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-500}{-2} = 250$$

El ancho lo obtenemos reemplazando el valor de x en la ecuación del perímetro:

$y = 500 - x \rightarrow y = 500 - 250 \rightarrow y = 250$

Por lo tanto, las dimensiones de la plantación son: Largo 250 m. y ancho 250 m.

¿Qué forma tiene el terreno a cercar? Este resultado es general: para un perímetro determinado, el rectángulo de mayor superficie que tiene dicho perímetro, es un cuadrado.

5) Un contador determina que el ingreso mensual ***I***, en pesos chilenos, que obtiene un relojero con experiencia, por la reparación de un número ***x*** de relojes, está dado por la función ingreso:
$I(x) = 20.000x - 50x^2$

a) Determine cuántos relojes se deben reparar para obtener el ingreso máximo quincenal.

Como la ecuación de la función cuadrática que modela la situación está planteada, se establece cuáles son los elementos principales de la parábola que sirven para dar respuesta a lo que se está preguntando:

El gráfico de la función $I(x) = 20.000x - 50x^2$ es una parábola concava, lo que implica que su vértice es el punto máximo.

La coordenada x del vértice está dada por:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-20.000}{-100} = 200$$

Esto nos indica que el relojero debe reparar 200 relojes para obtener el máximo ingreso mensual.

b) ¿Cuál será el ingreso máximo mensual?

Este se determina calculando la coordenada ***y*** del vértice de la función ***I (x):***

$$I(x) = 20.000 \cdot 200 - 50 \cdot 200^2 = 2.000.000$$

Actividad en el cuaderno

Graficar la parábola que modela la situación

6) Durante una exhibición, una avioneta debe realizar una maniobra de "vuelo rasante", la cual debe iniciar a una cierta altura h_0. La función que describe la altura h que alcanza la avioneta (en metros) a los x segundos de haber comenzado la maniobra está dada, por la expresión:

$$\boxed{h(x) = 0{,}5\, x^2 - 6x + h_0 \quad 0 \leq x \leq 12}$$

El piloto sabe que no corre riesgo de tocar el suelo si comienza la maniobra a una altura mayor de cierto valor. Indique cuál es esa altura mínima a partir de la cual debe iniciar la maniobra.

Solución:

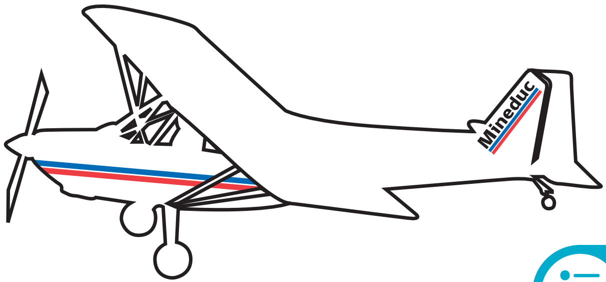
Los coeficientes de la función $h(x) = 0{,}5\, x^2 - 6x + h_0$ son: $a = 0{,}5$ $b = -6$ $c = h_0$

Como $a = 0{,}5 > 0$ gráficamente la función $h(x)$ es una parábola de orientación ______

Por lo tanto tiene un punto de mínimo, que está dado por el vértice de la parábola:

La coordenada x del vértice está dada por:

$$x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 0{,}5} = 6$$



Esto nos indica que a los 6 segundos de iniciada la maniobra debe alcanzar la altura mínima para no estrellarse contra el suelo.

TIPS
h_0 representa la altura a la cual el avión inicia la maniobra

La coordenada y del vértice está dada por: $h(6) = 0{,}5 \cdot (6)^2 - 6 \cdot 6 + h_0 = 18 - 36 + h_0 = h_0 - 18$
Esto nos indica que $h_0 - 18$ es la altura mínima que alcanza el avión durante la maniobra.

Igualando a cero esta expresión se obtiene la altura mínima a la cual el avión puede iniciar la maniobra:

$$h_0 - 18 = 0 \rightarrow h_0 = 18.$$

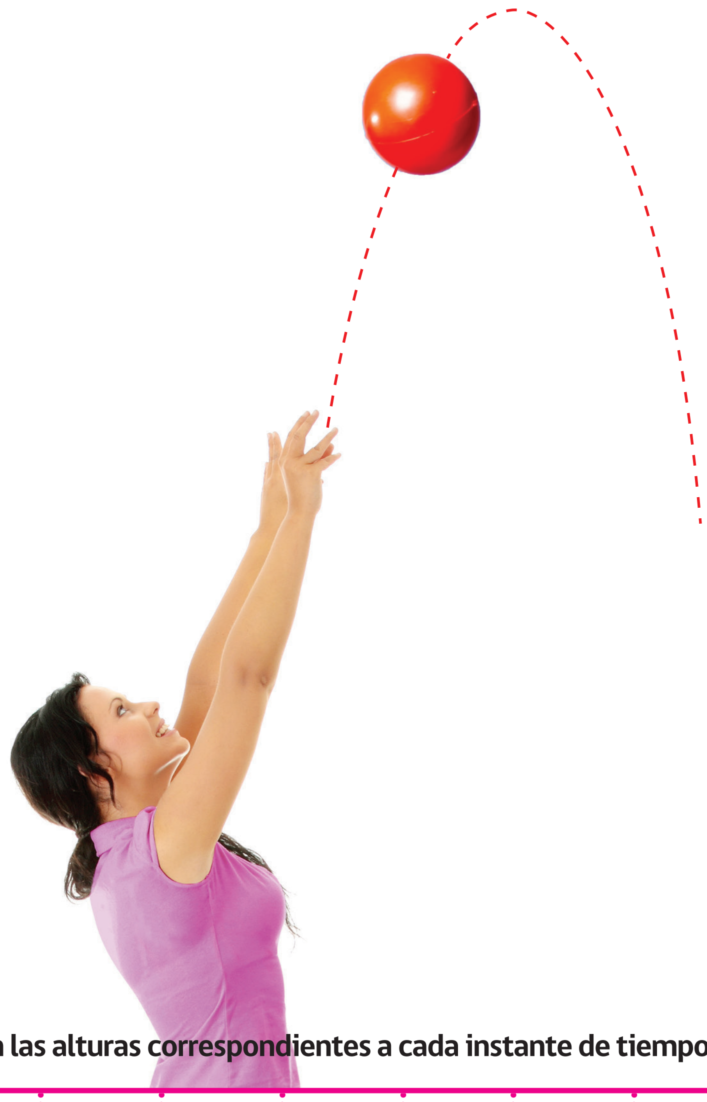
Por lo tanto la altura a la cual el avión inicia la maniobra de debe ser mayor que 18 metros para que el avión no se estrelle.

Compruebe determinando los vértices de las siguientes funciones para $h_0 \geq 18$, concluya indicando la altura mínima que alcanza el avión.

Función	Vértice	Conclusión
$h(t) = 0.5\, x^2 - 6x + 18$		
$h(t) = 0.5\, x^2 - 6x + 19$		
$h(t) = 0.5\, x^2 - 6x + 20$		
$h(t) = 0.5\, x^2 - 6x + 50$		

Actividad en el cuaderno

1) Se lanza una pelota hacia arriba, la altura de la pelota en cada instante t está dada por la función: $h(t) = -4t^2 + 68t + 160$, donde **h (t)** se mide en cm y t, el tiempo en segundos.



a) Complete la tabla con las alturas correspondientes a cada instante de tiempo dado.

t	0	2	4	6	8,5	11	13	15	17
$h(t)$									

b) Grafique la función $h(t)$.

c) ¿Cuántos segundos tarda la pelota en alcanzar su altura máxima?

d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

e) ¿Cuál es el tiempo de vuelo de la pelota?

2) Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 36 metros por segundo. Su distancia $h(t)$ en metros sobre el suelo, después de t segundos, está dada por la función: $h(t) = -0{,}25t^2 + 3{,}75t + 1{,}5$

a) **¿Cuánto tiempo demora la piedra en alcanzar su máxima altura?**

b) **¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?**

c) **¿Cuál es el tiempo de vuelo de la piedra?**

3) El tiempo (en minutos) de reacción, $f(x)$, de una plaga de insectos al contacto con un plaguicida está descrita por la función: $f(x) = x(9 - x)$, donde x es la cantidad de insecticida en mg/l ($0 < x < 9$, se debe usar menos de 9 mg/l de insecticida debido a los costos).

a) **¿Con cuánta cantidad de plaguicida se obtiene el tiempo optimo para la reacción?**

b) **¿Cual es el tiempo optimo para la reacción?**

4) Bajo ciertas condiciones, una compañía encuentra que la utilidad diaria en miles de pesos al producir x artículos de cierto tipo está dada por:

$U(x) = -x^2 + 1000x$

a) ¿Cuál es la máxima utilidad?

b) ¿Cuántos artículos deben fabricar en la compañía para que la utilidad sea igual a cero?

c) Esboce la gráfica de la función utilidad.

5) Una compañía armadora de *netbooks*, representa el costo anual, en pesos, por la función:
$C(x) = 90.000 + 500x + 0{,}01x^2$ y el ingreso anual, en pesos, por la función de venta:
$V(x) = 1.000x - 0{,}04x^2$ (x es la cantidad de netbooks producidos anualmente)

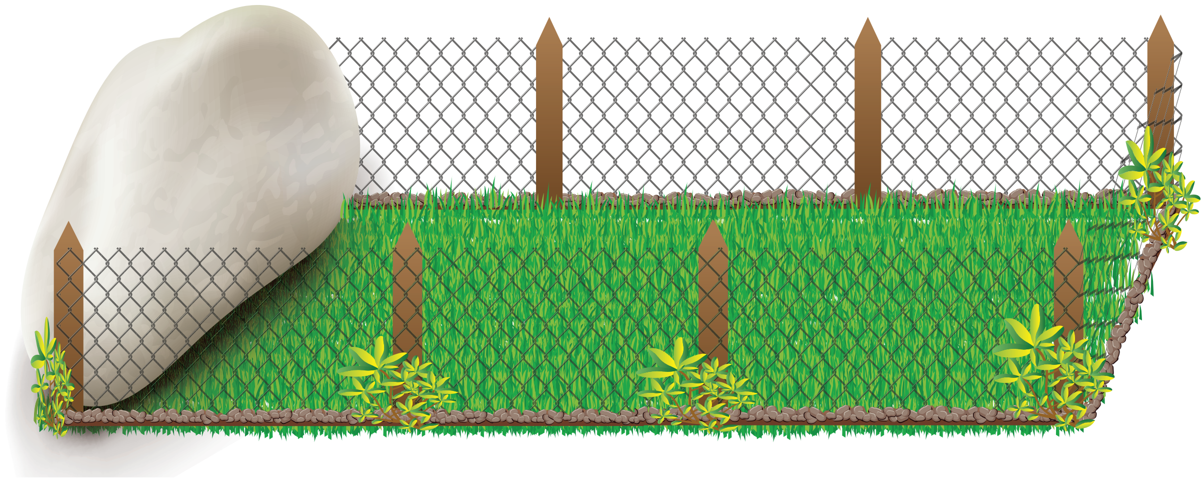
a) ¿Cuántos *netbooks* deben fabricarse para que la ganancia sea la máxima?

b) ¿Cuál es la ganancia máxima?

TIPS

La función ganancia se expresa como $G(x)$ y se define como la diferencia entre la venta menos el costo:
$G(x) = V(x) - C(x)$

6) Se debe construir un corral rectangular utilizando como uno de sus muros una roca para economizar malla de cerco. Determine las dimensiones del área máxima del corral si se dispone de 18 metros de malla para cercar.



7) En momentos de crisis económica, una compañía no desea tener pérdidas, si x son las unidades de productos vendidos, la utilidad que se obtiene está dada por la función: $U(x) = -x^2 + 120x + 1.300$.

Determinar para qué valores de x, no hay pérdidas ni utilidades.

EVALUACIÓN

I Marque la alternativa correcta.

1) Si $g(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + 2$, entonces : $g(1) =$ .....

a) $\frac{5}{2}$

b) 4

c) 5

d) 9

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, entonces : $f(-2) + f(2) =$ .....

a) 0

b) 1

c) 3

d) 8

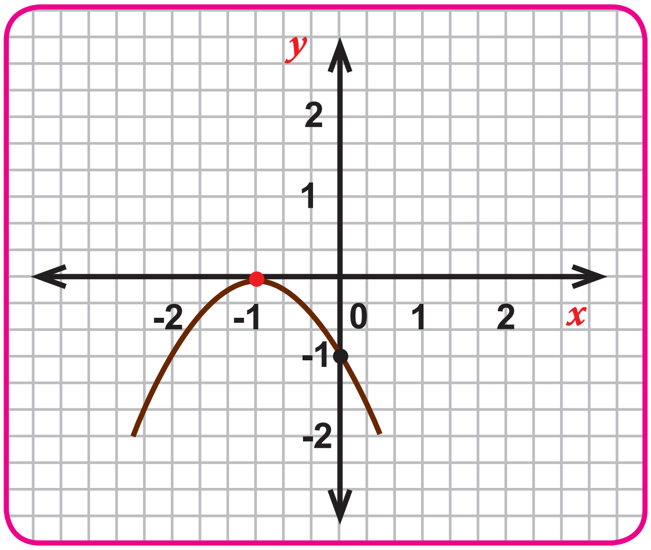
3) La parábola representada en el gráfico de la figura, **¿a qué función corresponde?**

a) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

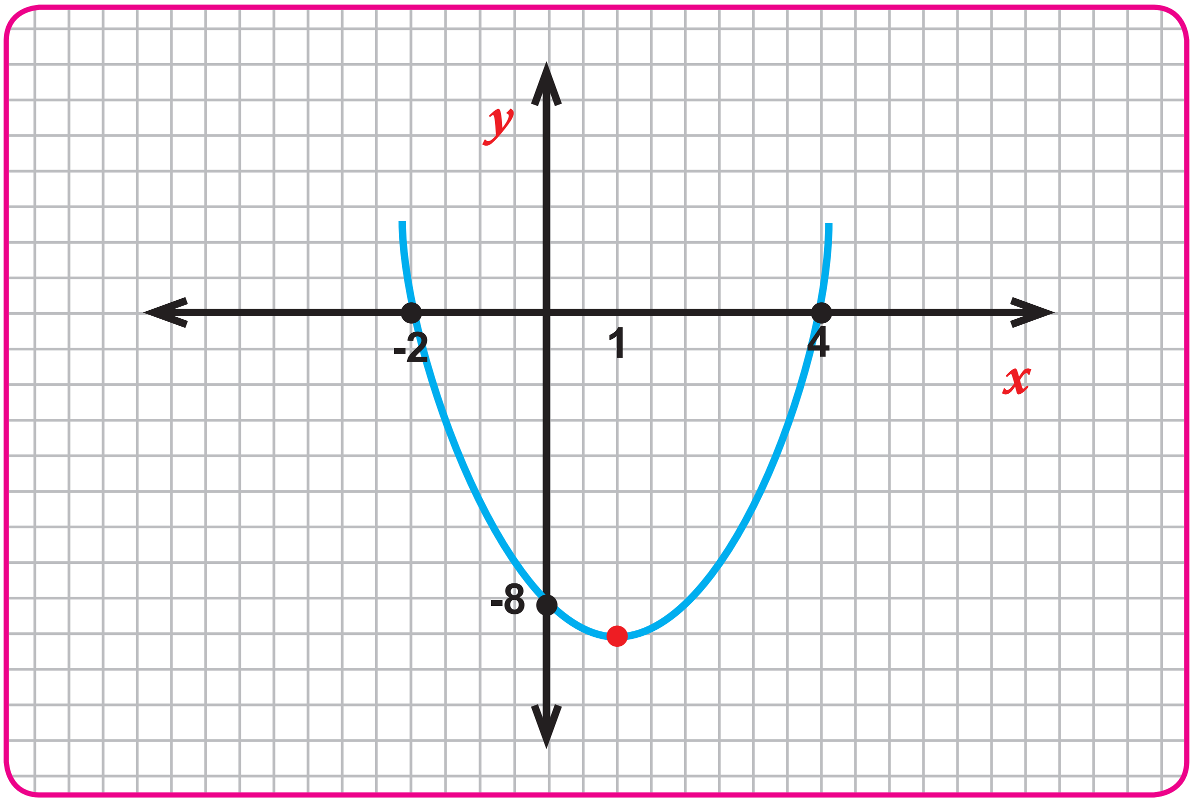
b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = -x^2 + 1$

d) $f(x) = -x^2 - 1$



4) Si la parábola de la figura es la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 + bx + c$ **¿Cuál (es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera (s)?**



I) $b^2 = 4$
II) $bc = -16$
III) $b + c = 10$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo I y III
d) Solo II y III

5) Dada la función cuadrática: $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$, el punto de intersección del eje de simetría con el eje $\boldsymbol{x}$ es:

a) (0,1)
b) (0,2)
c) (1,0)
d) (2,0)

6) Dada la función cuadrática: $f(x) = x^2 - x + 10$, el punto de intersección de la gráfica con el eje y es:

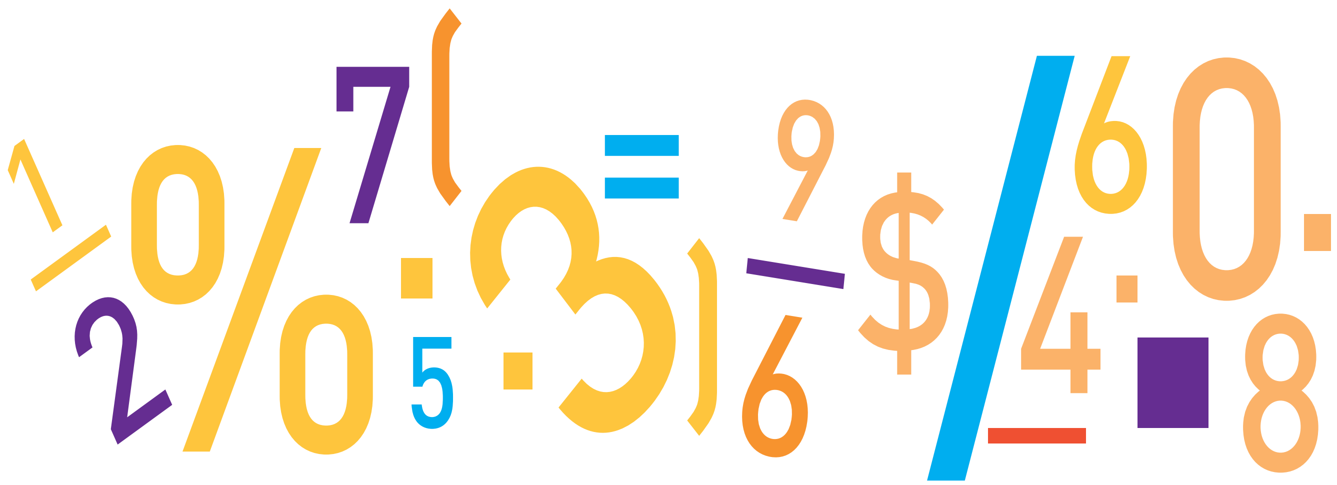
a) (-10, 0)
b) (10, 0)
c) (0, -10)
d) (0, 10)

7) Considere la función cuadrática: $f(x) = ax^2 - x + 2a$ y $f(1) = 2$, entonces a es igual a:

a) -2
b) -1
c) 1
d) 2

8) Dada la función cuadrática: $f(x) = 2x^2 - x + 2$, su gráfica:

a) Tiene dos intersecciones con el eje x.
b) Tiene una intersección con el eje x.
c) No tiene intersecciones con el eje x.
d) No tiene intersecciones con el eje y.



II) Dada la función cuadrática: $f(x) = 9x - \dfrac{x^2}{16}$

1) Complete la tabla:

x	0	18	36	54	72	90	108	126	144
$y = f(x)$									

2) Grafique la función $f(x)$

III) Resolver cada situación en su cuaderno:

1) Para la fiesta de San Pedro, en la caleta de Queule, región de La Araucanía, se planificó realizar una exhibición de fuegos artificiales, los que explotan al alcanzar su máxima altura. Cuando han transcurrido t segundos desde el lanzamiento de cada proyectil, la altura, en metros, está dada por la función:

$$h(t) = -2t^2 + 40t + 100$$

a) **¿Cuánto demoran los fuegos artificiales en alcanzar su altura máxima?**

b) **¿A qué altura explotan los fuegos artificiales?**

2) Un delfín realiza un salto tal, que su trayectoria parabólica está dada por la función cuadrática $f(x) = -t^2 + 6t$, $0 \leq t \leq 6$ donde t representa el tiempo en segundos y $f(t)$ la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

a) **Grafique el salto del delfín.**
b) **Calcule la altura que alcanza el delfín a los 2 segundos de haber saltado.**
c) **Calcule la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante.**
d) **¿A partir de qué instante el delfín comienza a caer?**
e) **¿Cuánto demora en caer desde que alcanza la altura máxima?**

IV) Para cada una de las funciones cuadráticas determine:

- $f(x) = x^2 - 2$
- $h(t) = (t + 2)^2$
- $f(x) = x^2 + x + 1$
- $f(x) = x^2 + 2$
- $g(t) = 2 - t^2$
- $s(t) = t^2 + 4t + 6$
- $f(x) = x^2 + x - 1$
- $f(x) = -x^2 + 2$

a) **Orientación o concavidad.**
b) **Dominio.**
c) **Recorrido.**
d) **Eje de simetría.**
e) **Vértice.**
f) **Intersección con el eje y.**
g) **Intersecciones con el eje x.**
h) **Gráfico de la función.**
i) **Explique las diferencias y semejanzas que observe entre las gráficas.**

BIBLIOGRAFĪA

1) Decreto Supremo de Educación Nº 211 de 2009 que reemplaza el Decreto Nº 131 de 2003 sobre nivelación de estudios de adultos. MINEDUC.
2) Decreto Supremo de Educación Nº 257 de 2009 que deroga Decreto Supremo de Educación Nº 239 de 2004 sobre el marco curricular de la educación de adultos.
3) Peterson, John A. y cols. (2002). *Teoría de la Aritmética*. Ciudad de México, México: Editorial Limusa-Wiley.
4) Zill, D. y Dewar, J. (1996) *Álgebra y Trigonometría*. McGraw-Hill. Ciudad de México, México: Editora Prentice Hall.
5) Swokowski, E. y Cole, J. (2002). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. 12º Edición. Ciudad de México, México: Editorial Cengage.

Sitios web

1) www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=133244
2) www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=137998
3) http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_Seg_grado.html
4) http://www.profesorenlinea.cl/matematica/funcion_cuadratica.html
5) http://aprenderencasa.educ.ar/aprender-en-casa/Funci%F3n%20cuadr%E1tica.pdf

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile