



## Guía de Aprendizaje N° 3

# MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

Educación Matemática

Segundo nivel o ciclo de Educación Media

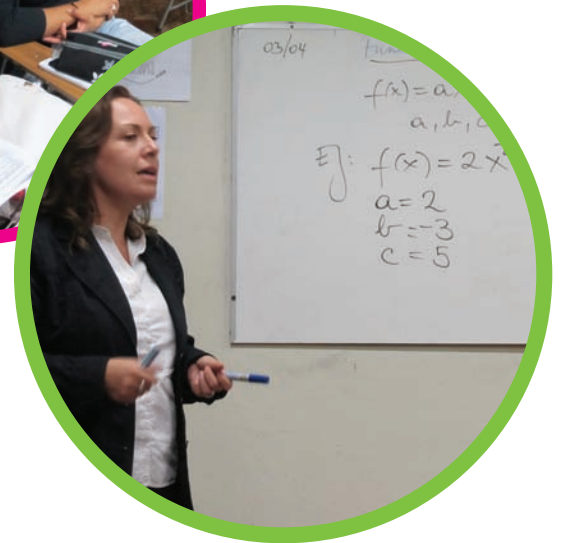
Educación para Personas Jóvenes y Adultas



Ministerio de  
Educación

Gobierno de Chile





## Guía de Aprendizaje N° 3

# MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

Educación Matemática

Segundo nivel o ciclo de Educación Media

Educación para Personas Jóvenes y Adultas

© Ministerio de Educación  
Avda. Bernardo O'Higgins 1371, Santiago de Chile

Guía de Aprendizaje N°3

**MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS**

**Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media**

**Educación para Personas Jóvenes y Adultas**

Primera edición, año 2013  
Inscripción N° 236.038

Autores:

Mauricio Huircán Cabrera  
Katherina Carmona Valdés

Colaboradores:

Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé, María Angélica Contreras Fernando,  
Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo.  
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:

Jose Luis Moncada Campos

Revisión Editorial Matemática:

Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Normalización de Estudios  
División de Educación General

Impreso por:

RR Donnelley

Año 2013

Impresión de 99.000 ejemplares

## Iconografía



**Información**



**Atención**



**Tips**



**Página Web**



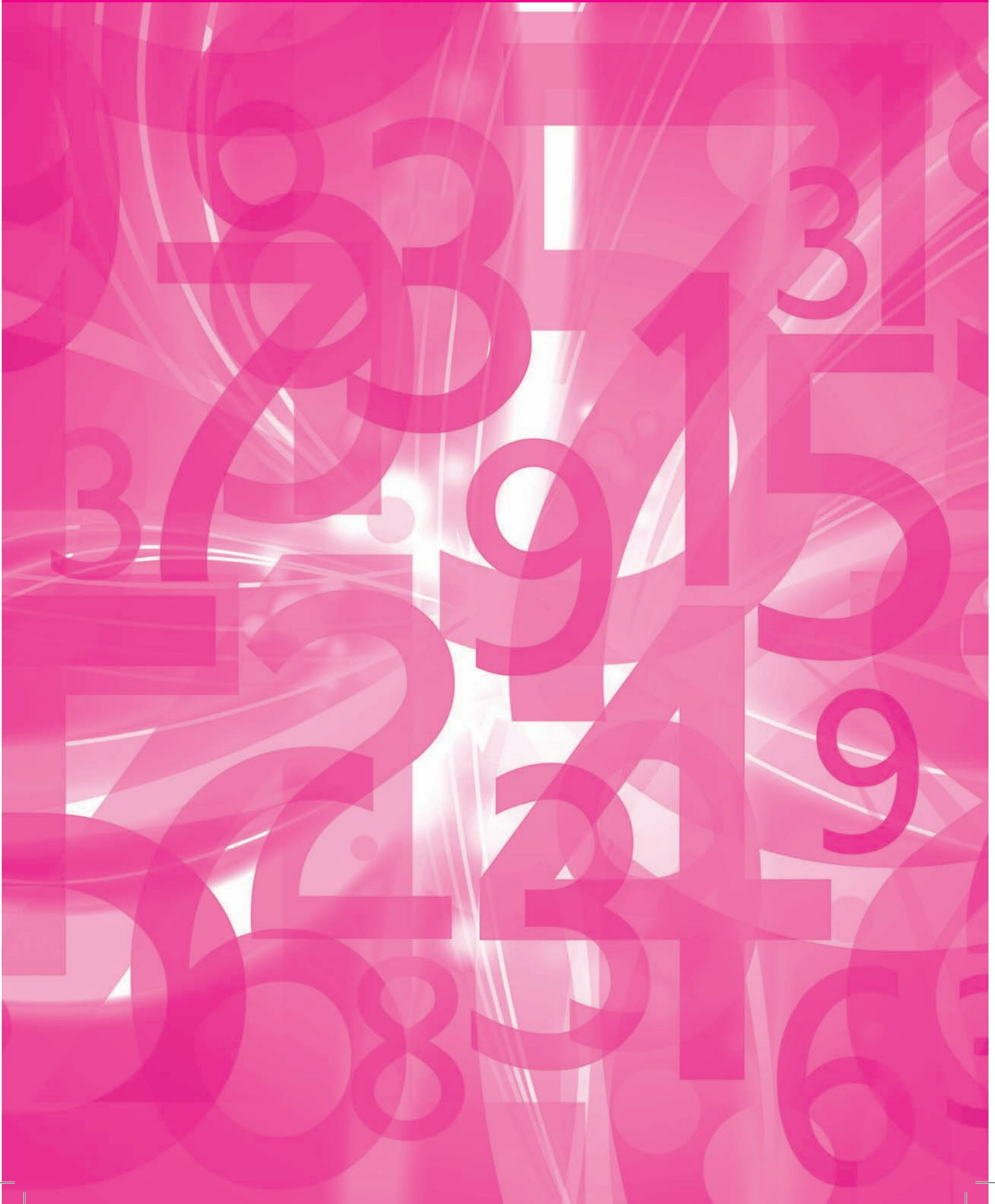
**Actividad**



**Actividad en el cuaderno**



**Evaluación**



## Presentación

El material que la Coordinación Nacional de Educación de Adultos del Ministerio de Educación (Mineduc) pone a su disposición es una herramienta de apoyo para los estudiantes del último nivel de Educación Media, ya sea de la modalidad regular o flexible. En las siguientes páginas encontrará conceptos matemáticos, ejemplos resueltos de problemas y actividades que se pueden desarrollar en clases o cuando estudie.

Este material está dividido en tres guías de trabajo, en las que se abordan contenidos de funciones exponenciales y funciones logarítmicas. Se inicia desde los contenidos más simples, para ir paso a paso hacia los más complejos, brindando un espacio de autonomía para el estudio de la matemática. El desarrollo de las unidades considera la secuencia didáctica inicio, desarrollo y cierre, pone énfasis en mostrar ejemplos resueltos completos y entregar otros que se solucionan con apoyo del profesor o profesora; todo con la finalidad de fomentar la

rigurosidad y precisión del uso de los conceptos matemáticos que se tratan.

La guía de trabajo N°1 trata la valoración de la función exponencial y su gráfica, para terminar desarrollando situaciones y problemas que involucran el trabajo con funciones exponenciales.

En la guía de trabajo N°2 se trata la valoración de la función logarítmica, su gráfica y ecuaciones, para terminar desarrollando situaciones que involucran el trabajo con funciones de este tipo.

Una vez desarrolladas las guías de trabajo N°1 y N°2 puedes reconocer a través de la visualización los gráficos de la función exponencial y logarítmica.

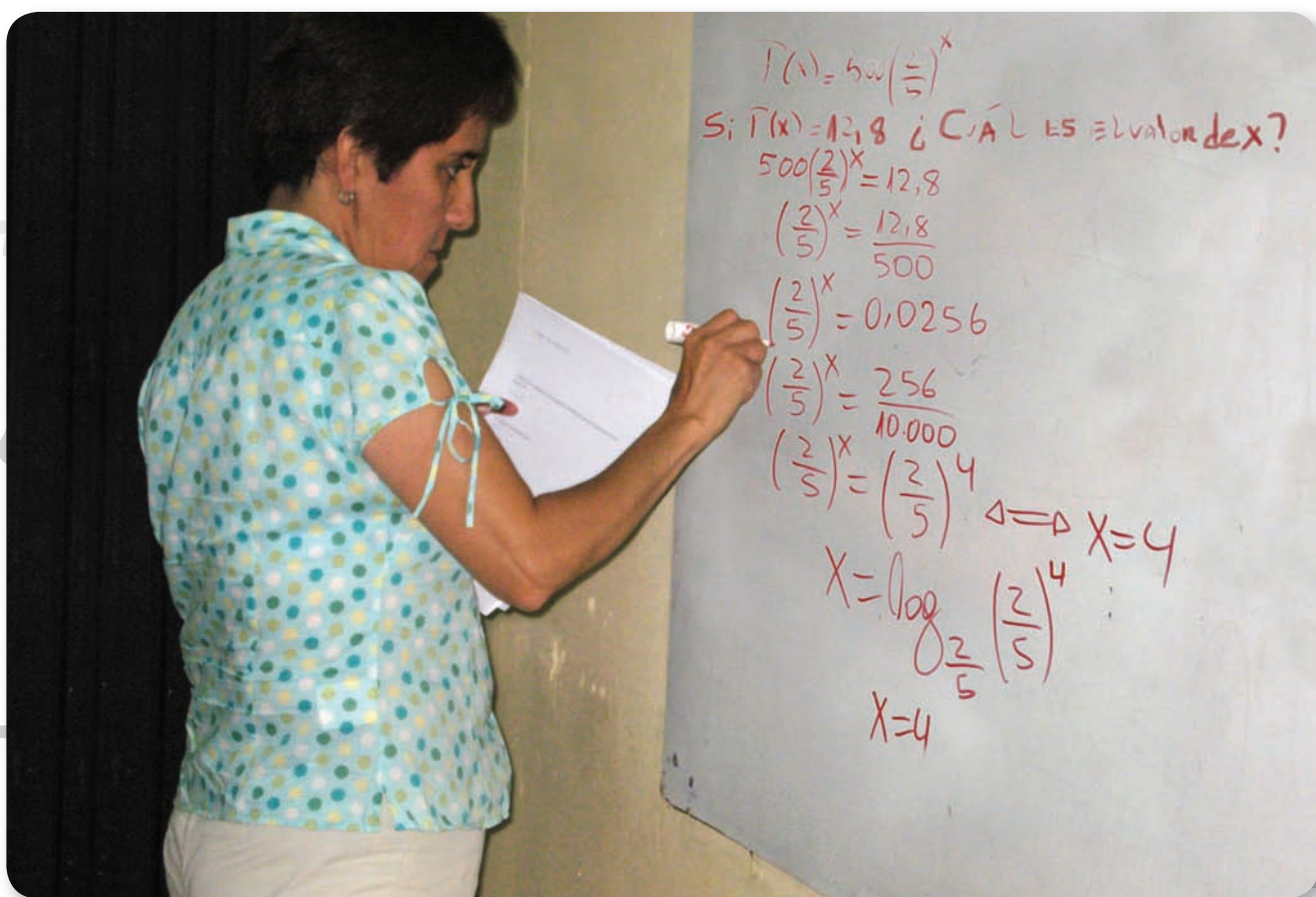
Es importante destacar que el proceso de aprendizaje de las matemáticas y de otras ciencias es individual y pasa por la dedicación y el esfuerzo de la persona que aprende. Lo invitamos a trabajar en este material y a descubrir cómo las matemáticas pueden ayudarle para la vida.



$$1, 2, x+5, 2, \frac{x}{2}, 2, 1, 2, 5$$

## Guía de trabajo N° 1

# Función exponencial y algo más...



### Contenidos:

- Función exponencial.
- Gráficos de la función exponencial.
- Análisis de situaciones en diversos ámbitos que pueden ser modeladas por una función exponencial.

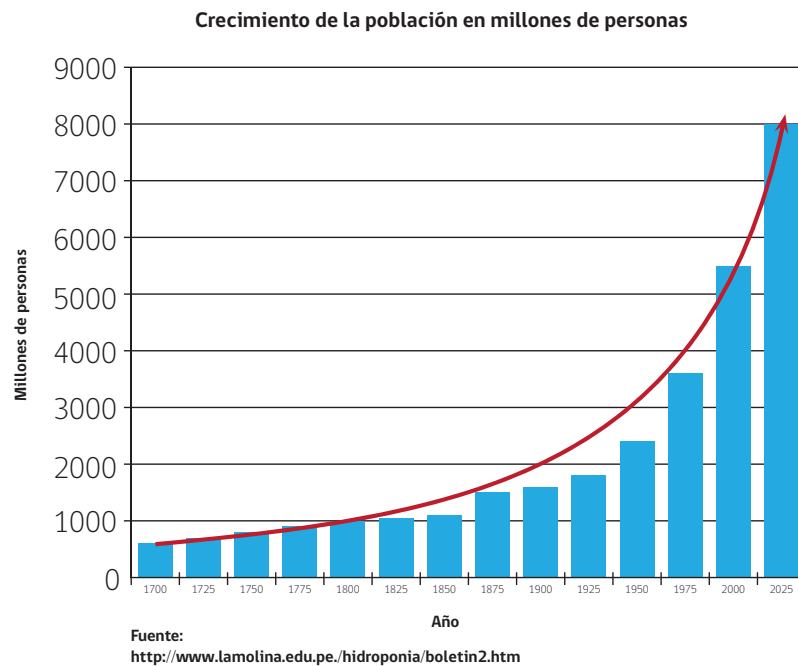


## CONOCIENDO LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Los modelos matemáticos son una aproximación a fenómenos del mundo real, las funciones logarítmicas y exponenciales se ajustan de manera muy precisa a diversas situaciones y campos de trabajo del hombre; tales como: Química, Física, Biología, Economía, Ingeniería y otras, donde contribuyen a describir los fenómenos que pueden modelar.

El erudito Robert Malthus, considerado el padre de la demografía, publicó en 1798 el libro *Ensayo sobre el principio de la población*. Entre sus principales puntos plantea que: «La población tiende a crecer de acuerdo con una progresión geométrica, en tanto que los medios de subsistencia lo hacen en progresión aritmética».

Observa atentamente el gráfico de crecimiento demográfico:



### TIPS

En la naturaleza el tipo de crecimiento exponencial no es el más frecuente, pues las poblaciones no crecen indefinidamente debido a que la resistencia ambiental se opone a la expresión del potencial biológico de una población (capacidad para aumentar su densidad).

Para profundizar más le invitamos a revisar este link:

[www.educarChile.cl/Portal.Base/web/vercontenido.aspx?ID=138540](http://www.educarChile.cl/Portal.Base/web/vercontenido.aspx?ID=138540)

<http://recuerdosdepandora.com/historia/como-ha-crecido-tan-rapido-la-poblacion-mundial/>

## FUNCIÓN EXPONENCIAL

La expresión  $y = a^x$ , o  $f(x) = a^x$ , ( $0 < a < 1$  o  $a > 1$ ) se denomina **función exponencial** donde el valor de  $a$  puede ser cualquier **número positivo** excepto el 1.



Recordemos que una función es una relación entre dos variables, en la que a cada valor de la primera variable independiente  $x$ , le corresponde un único valor de la segunda variable dependiente  $y$

Las funciones exponenciales, son relaciones funcionales en las cuales la variable independiente  $x$  es el exponente de la potencia o parte de la potencia que conforma.

La función que a cada número real  $x$  le hace corresponder la potencia  $a^x$  se llama **función exponencial de base  $a$  y exponente  $x$** .

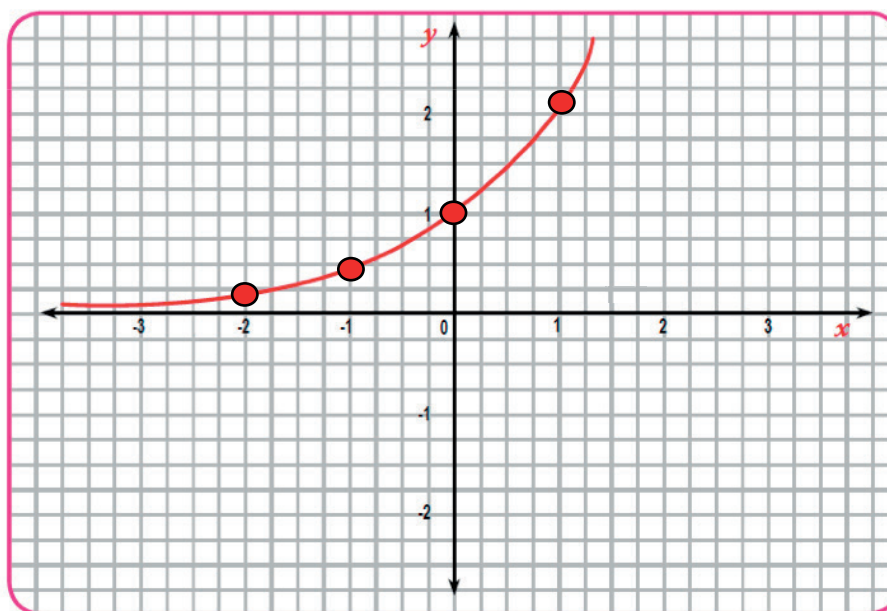


### Ejemplos:

Dada la función exponencial  $y = f(x) = 3^x$  y su tabla correspondiente:

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 3^x$	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Podemos graficar esta función:



Utilizando calculadora realiza la tabla de valores y la grafica de la función exponencial  $f(x) = 5^x$



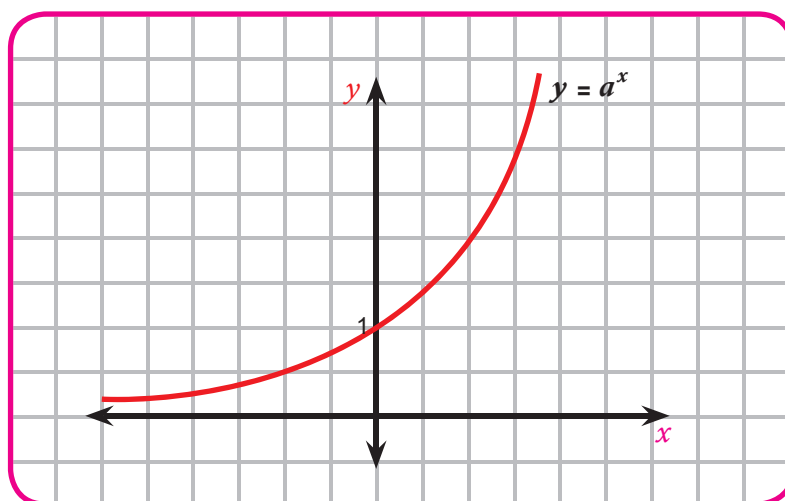
## ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

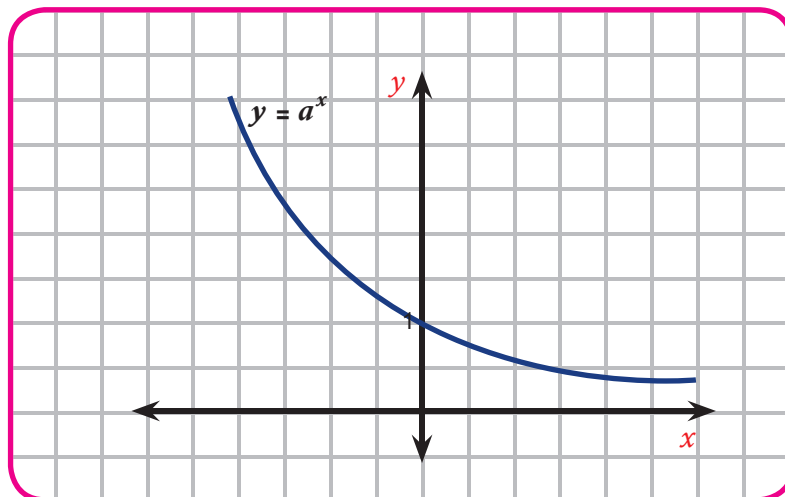
$$x \rightarrow y = f(x) = a^x$$

$$a > 0, a \neq 1$$

La base  $a > 1$  hace que la función sea **creciente**:



La base  $0 < a < 1$  hace que la función sea **decreciente**:



Recuerda que para graficar una función es necesario "evaluar" la función, construir una tabla de valores y luego llevar a un gráfico.



## ACTIVIDAD

## Evaluar una función y realizar su gráfica.

Observe atentamente el proceso de evaluación de la función.

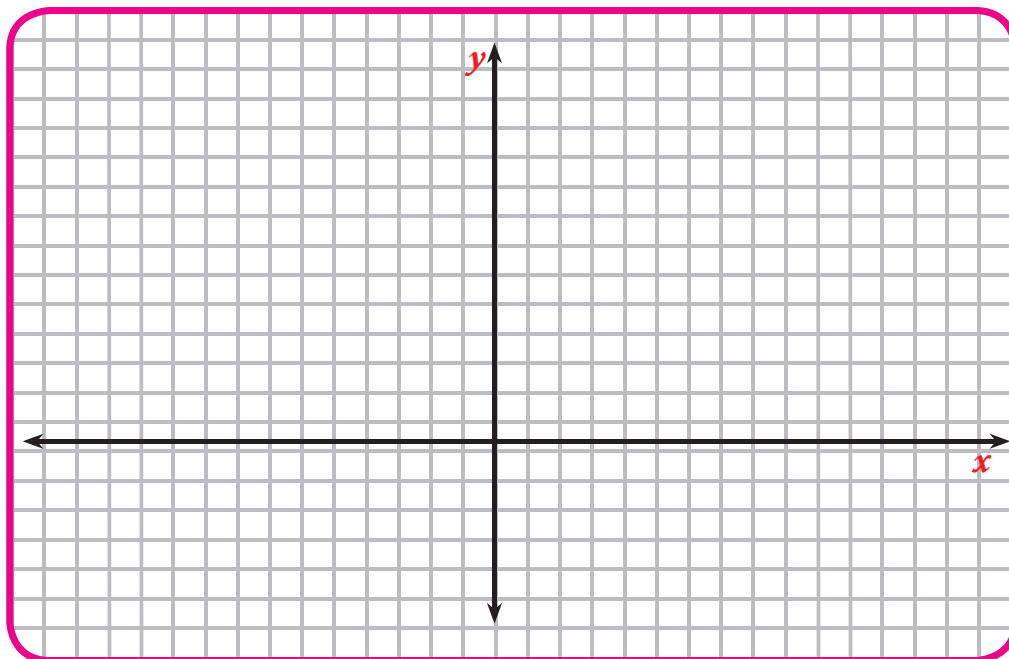
Dada la función  $f(x) = 3^x$ , evaluamos la función para  $x=0$ .

Reemplazamos en  $x$  su valor **cerro**,  $f(0)=3^0 \longrightarrow f(0)=1$ .

1) Completa con este mismo procedimiento los cuadros en blanco.

Función	Valor de $x$ a evaluar	Función evaluada	$y = f(x) = 3^x$	$x$
$f(x) = 3^x$	$x = 0$	$f(0) = 3^0 = 1$	1	0
	$x = -1$	$f(-1) = 3^{(\dots\dots)} =$ <input type="text"/>	<input type="text"/>	-1
	$x = 1$	$f(1) = 3^1 =$ <input type="text"/>	<input type="text"/>	1
	$x = -2$	$f(-2) = 3^{-2} =$ <input type="text"/>	<input type="text"/>	-2
	$x = 2$	$f(2) = 3^{\dots} =$ <input type="text"/>	<input type="text"/>	2

2) Realiza la grafica de la situación función  $f(x) = 3^x$



3) Determina si la función es creciente o decreciente



**ACTIVIDAD**

Realice la gráfica de las funciones exponenciales, cada curva con un color distinto.

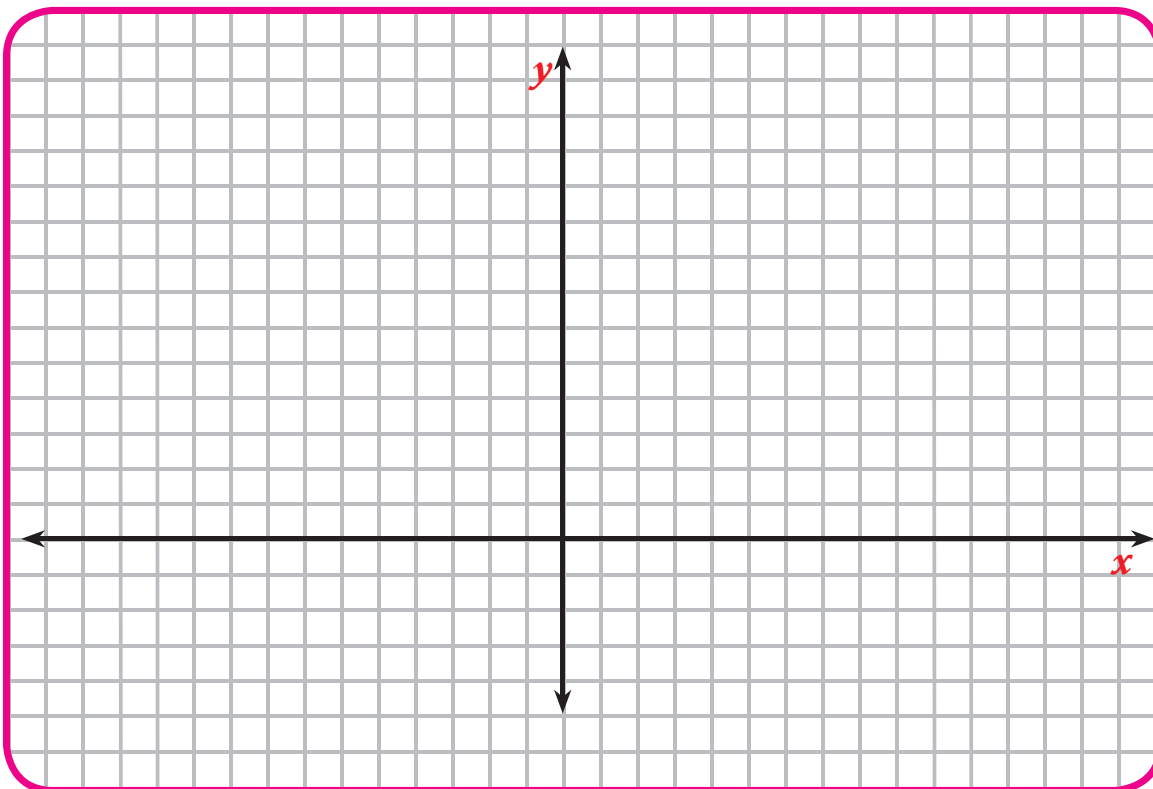
a)  $y = f(x) = 2^x$

b)  $y = f(x) = 2^x - 1$



**TIPS**

Puede descargar gratuitamente y en español el programa Geogebra que permite graficar funciones.



¿Qué podría concluir al observar la gráfica de las funciones?

.....

.....

.....

¿Cómo cree que será el gráfico de la función  $y = f(x) = 3^x - 1$ ?

.....

.....

.....





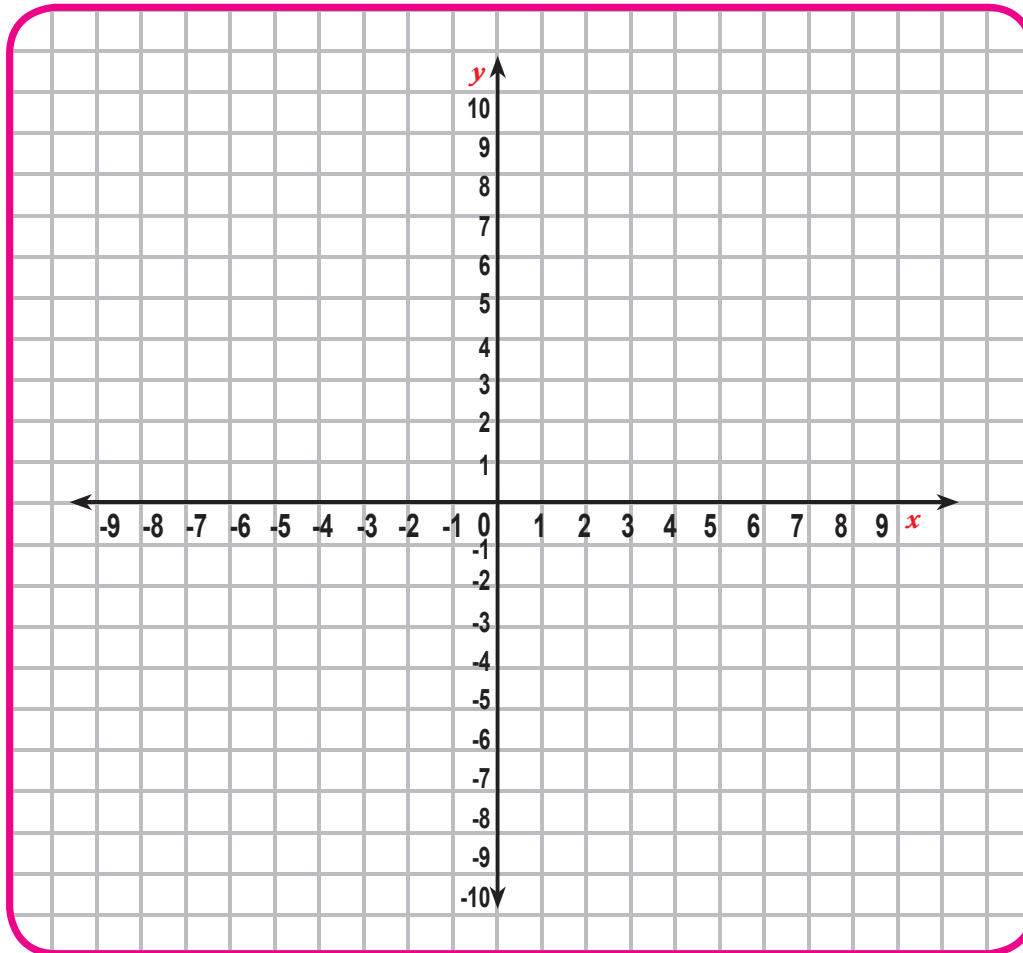
ACTIVIDAD

Realice la gráfica de las siguientes funciones exponenciales.

$$\text{a) } y = h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\text{b) } y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

$$\text{b) } y = f(x) = 2^x + 1$$



¿Qué podría concluir al observar la gráfica de las funciones?

.....

.....

¿Cómo cree que será el gráfico de la función  $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ ?

.....

.....



## Segundo nivel o ciclo de Educación Media - Guía Nº 3



Actividad en el cuaderno

1) Complete las siguientes tablas y ubique los puntos en el plano cartesiano esbozando la gráfica de la función exponencial:

a)  $f(x) = 4^x$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 4^x$								

b)  $h(x) = 4^x + 1$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 4^x + 1$							

c)  $g(x) = 4^x - 1$

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 4^x - 1$							

2) Complete la tabla y esboce las gráficas de las tres funciones en un solo plano cartesiano:

a)

$t$	$f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^t$	$h(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

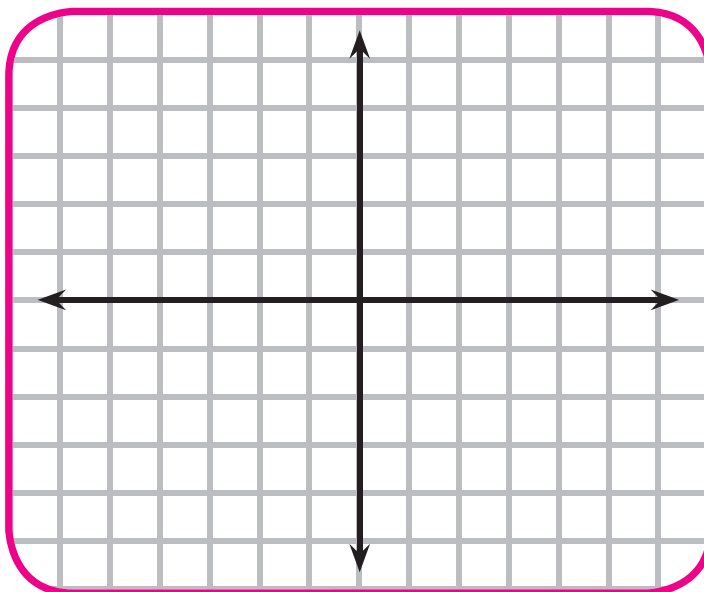
b)

$t$	$f(t) = 2^t$	$h(t) = 3^t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

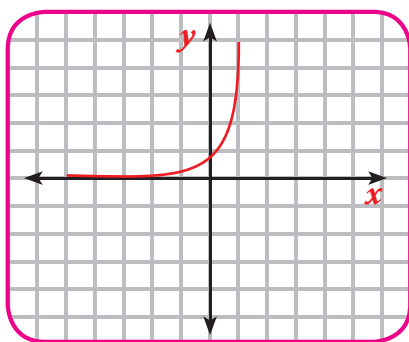


1) Complete la tabla de las funciones dadas, esboce sus gráficas y compárelas:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = f(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$			1		9			
$y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$		9	3				$\frac{1}{27}$		



2) Asocie cada función dada con su correspondiente esbozo de gráfica uniéndolo con una línea:



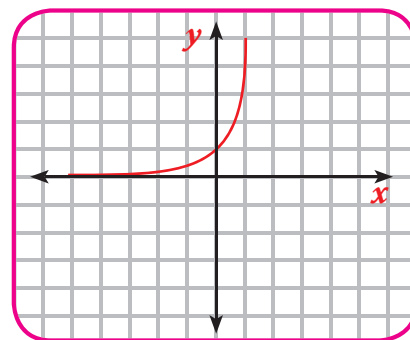
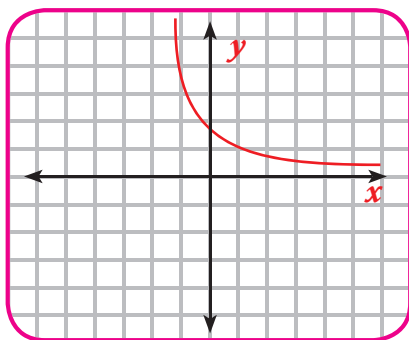
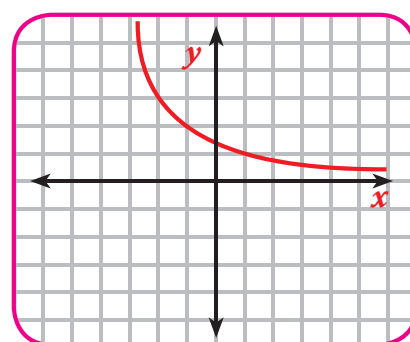
$$f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$f_2(x) = 1 - 2^x$$

$$f_3(x) = 4^x$$

$$f_4(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$f_5(x) = 10^x$$





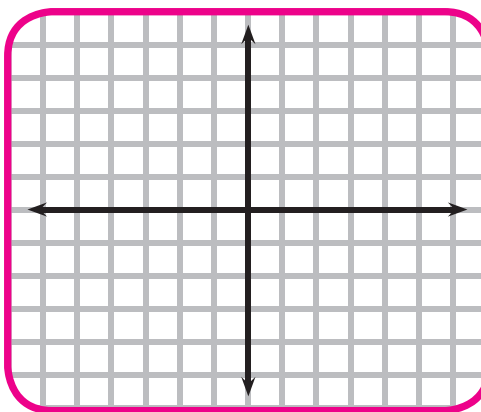


EVALUACIÓN

4) Complete la tabla valorando la función dada y esboza su gráfica.

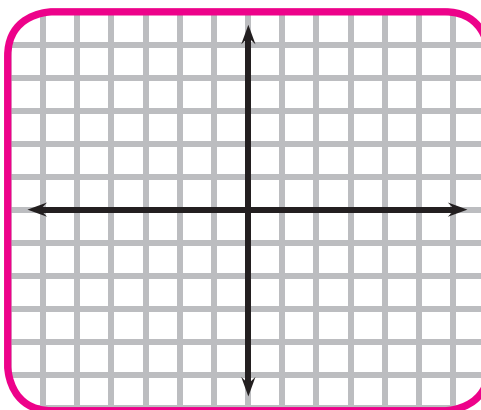
a)

$t$	$f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^t$	$h(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		




b)

$t$	$f(t) = 2^t$	$h(t) = 3^t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		



## SITUACIONES Y PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN UTILIZANDO LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

 Resolveremos algunas situaciones reales con la aplicación de funciones exponenciales:

1) Las diferencias de presiones, que se producen al ascender una montaña, son la causa que algunas personas se apunen y tengan fuertes dolores de oídos. Investigaciones científicas determinaron que la presión atmosférica está dada por la expresión:

$$y = f(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^x$$

$x$ : se mide en miles de metros.

$y$ : se mide en atmósferas

a) Realice la gráfica de la función.

b) ¿Qué presión hay a cuatro mil metros de altura?

**Solución:**

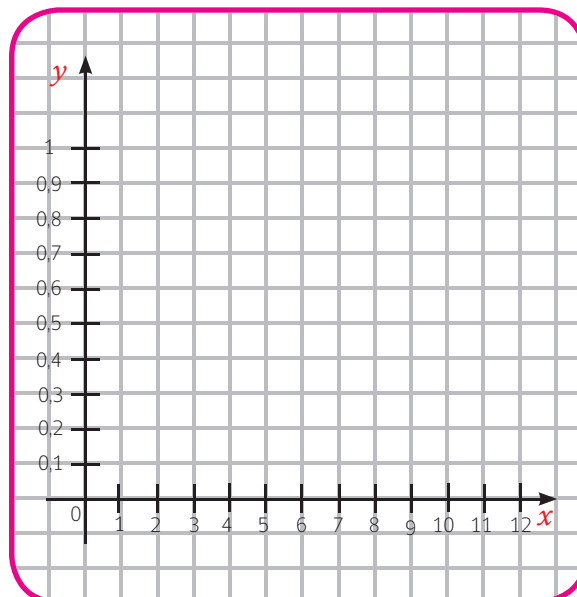
a) Para realizar la gráfica es necesario hacer una tabla de valores, evaluar la función y ubicar los puntos correspondientes en el plano cartesiano:

Como  $x$ : se mide en miles de metros completaré la siguiente tabla:

$x$	0	1	2	4	6	8	10	12
$y = f(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^x$								

b) El valor  $x=4$  indica cuatro mil metros de altura y la tabla muestra el valor de  $y =$   atmósferas.

**Respuesta:** Por lo tanto a los cuatro mil metros hay  atmósfera de presión.





## ACTIVIDAD

## Ejemplos de problemas que involucran funciones exponenciales:

Como se explicó anteriormente, las funciones exponenciales son muy útiles para describir algunas situaciones, como por ejemplo:

- 1) El crecimiento demográfico de una población de bacterias, esta modelado por una función exponencial de la forma:

$$P(t) = P_0 \cdot 2^t$$

donde:

$P_0$ : es la población inicial de bacterias cuando  $t = 0$

$t$ : es el tiempo medido en horas

Si la población bacteriana inicial es de 100 bacterias, complete la tabla según los tiempos en horas dados:

$t$ : tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6
Población $P(t)$	100		400	1.600		6.400	

Sugerencia:

Para completar la tabla, proceda reemplazando cada valor de  $t$ , en la función:

$$P(t) = P_0 \cdot 2^t \rightarrow P(t) = 100 \cdot 2^t$$

↓ ↓

$$P(0) = 100 \cdot 2^0 \rightarrow P(0) = 100 \cdot 1 = 100$$

$$P(1) = 100 \cdot 2^1 \rightarrow P(1) = 100 \cdot 2 = 200$$

$$P(2) = 100 \cdot 2^2 \rightarrow P(2) = 100 \cdot 4 = 400$$

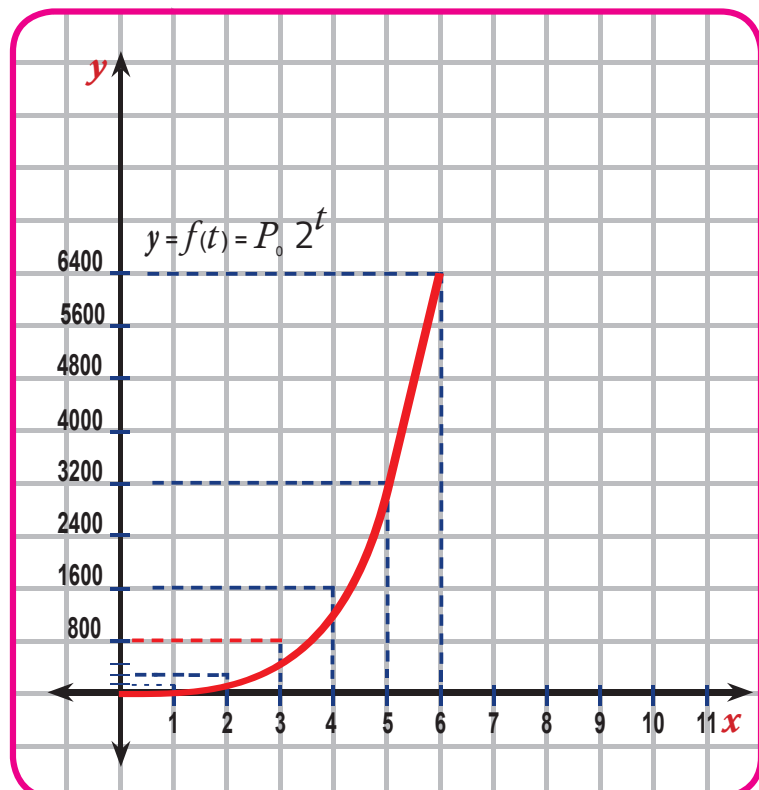
$$P(3) = 100 \cdot 2^3 \rightarrow P(3) = 100 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$P(4) = 100 \cdot 2^4 \rightarrow P(4) = 100 \cdot 16 = 1.600$$

$$P(5) = 100 \cdot 2^5 \rightarrow P(5) = 100 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$P(6) = 100 \cdot 2^6 \rightarrow P(6) = 100 \cdot 64 = 6.400$$

Esbozo del gráfico de la función:



## Educación Matemática -MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

¿Qué pasaría si  $P_0 = 10$ ? Complete la siguiente tabla y esboce el gráfico  $x: P(t) = P_0 \cdot 2^t \rightarrow P(t) = \dots \cdot 2^t$

$t$ : tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Población $P(t)$	10										

Realice el gráfico de la función:

Si la población inicial (cuando  $t = 0$ ) es 10 ( $P_0 = 10$ ) ¿Cuál será el tamaño de la población al cabo de 5 horas?

.....

Si la población inicial (cuando  $t = 0$ ) es 20 ( $P_0 = 20$ ) ¿Cuál será el tamaño de la población al cabo de 7 horas?

.....

## Segundo nivel o ciclo de Educación Media - Guía Nº 3

2) Si se agregan 20 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad  $q(t)$ , de sal sin disolver luego de  $t$  segundos está dada por:  $q(t) = 20 \left(\frac{4}{5}\right)^t$

a) ¿Cuánta cantidad de sal sin disolver hay luego de 10 segundos?



Actividad en el cuaderno

b) Esboce la gráfica después de completar la tabla

$t$ : (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q(t) = 20 \left(\frac{4}{5}\right)^t$		16				6,6			3,4		

3) El modelo aproximado de Jents:

$$y = 79 + 6x - e^{3,3-x}$$

es considerado el más preciso para determinar la estatura de los niños menores de 7 años. Si  $y$  es la estatura medida en centímetros y  $x$  es la edad medida en años.



a) Completar la tabla de estatura de los niños menores de 7 años.

$x$ : (años)	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6
$y = 79 + 6x - e^{3,3-x}$	52,5	59,8			75,2			102,5		114,9



Actividad en el cuaderno

b) Esboce la gráfica de la estimación de la estatura de los niños menores de 7 años.

4) Chile, los años 1996, 1997 y 1998, tenía una población aproximada de 14.419.000, 14.622.000 y 14.822.000 habitantes respectivamente. Actualmente, según el censo del año 2002, tiene una población aproximada de 15,5 millones de habitantes y está **creciendo a una tasa anual de 1,3%**. Crecimiento que se ha ido desacelerando desde el año 1992.

Si se observan estos datos, o si se estudia esta situación con datos más completos del Instituto Nacional de Estadísticas (INE) se puede observar que este crecimiento no es constante; y si lo fuese, tendríamos un crecimiento lineal, pero no ocurre así. Este tipo de crecimiento atiende más bien a un crecimiento exponencial que está determinado por la función:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$$

donde:

$P_0$ : es la población inicial (cuando  $t = 0$ ),

$k$ : es la tasa de crecimiento en porcentaje anual,

$t$ : es el tiempo medido en años,

$P(t)$ : es la población en el tiempo  $t$ .

A partir de estos datos, responda:

- a) **¿Qué población habrá en Chile en 10 años más y en 50 años más, si sigue creciendo a esta misma tasa?**
- b) **¿Qué población habrá en Chile en 10 años más, si la tasa de crecimiento cae a la mitad de la actual?**
- c) Si la tasa de crecimiento se duplica respecto de la tasa actual. **¿Qué población habrá en Chile en 10 años más?**



**Solución:**

Para resolver el problema, es necesario determinar la función:  $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$ , en este caso, los datos permiten escribir la función así:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt} \rightarrow P(t) = 15,5 \cdot e^{0,013t}$$

$P_0 = 15,5$ , millones es la población inicial el año 2002, (cuando  $t = 0$ ),

$k = 1,3\% \rightarrow k = \frac{1,3}{100} = 0,013$ , tasa anual de crecimiento.



**a)** Para  $t = 10$  años:

$$P(t) = 15,5 \cdot e^{0,013t} \rightarrow P(10) = 15,5 \cdot e^{0,013 \cdot 10} = 15,5 \cdot e^{0,13} = 17,652$$

Por lo tanto, después del 2002 habrá más de 17,7 millones de habitantes aproximadamente. **¿Por qué?**

Determine la población en 50 años más.

**b)** Para  $t = 10$  considerar la mitad de la tasa anterior, es decir;

$$P(t) = 15,5 \cdot e^{0,0065t} \rightarrow P(10) = 15,5 \cdot e^{0,0065 \cdot 10} = 15,5 \cdot e^{0,065} = 16,541 \text{ millones}$$

Por lo tanto, después del 2012 habrá más de 17,7 millones de habitantes aproximadamente. **¿Por qué?**

**c)** Determine la población en 10 años más con una tasa de 2,6%.

**d)** Con los datos determinados, esbozar la grafica de la función.



Actividad en el cuaderno

En Chile existían dos cuerpos legales que regulaban la conducción bajo los efectos del alcohol: La Ley de Alcoholes N°17.105 del año 1969 contempla la figura penal del conductor del vehículo motorizado en estado de ebriedad y la obligación a la prueba de alcoholemia.

- La Ley de Tránsito N° 18.290 de 1984 que establece el concepto de conducir bajo la influencia del alcohol sin estar ebrio y lo tipifica como una infracción gravísima.

La diferencia entre estos dos cuerpos legales está basada en una interpretación de las alcoholemias hechas por el Servicio Médico Legal en 1972 y que la Corte Suprema de Justicia recomendó a los tribunales del país, donde con 1 gramo de alcohol por litro de sangre se considera al conductor en estado de ebriedad, y entre 0,5 hasta 0,99 gr/litro será considerado bajo la influencia del alcohol sin estar ebrio.

Investigaciones médicas recientes han propuesto un modelo matemático que indica porcentualmente la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol, la cual está dada por la función de riesgo

$$R(x) = 6 \cdot e^{kx} \quad \text{donde,}$$

$x$ : es la concentración de alcohol en la sangre,

$k$ : es una constante,

$R$ : es la probabilidad de tener un accidente (expresada en porcentaje).

$e$ : corresponde a 2,71.

- a)** Al suponer que una concentración de 1 gr. de alcohol en la sangre produce un riesgo del 100 % ( $R=100$ ) de sufrir un accidente, en este caso el valor de la constante es 2,81, aproximadamente. Utilizando este valor de  $k$ , calcule el riesgo de sufrir un accidente si la concentración de alcohol en la sangre es de 0,5 gr/litro.

**Sugerencia:** considere  $x = 0,5$  y  $k = 2,81$

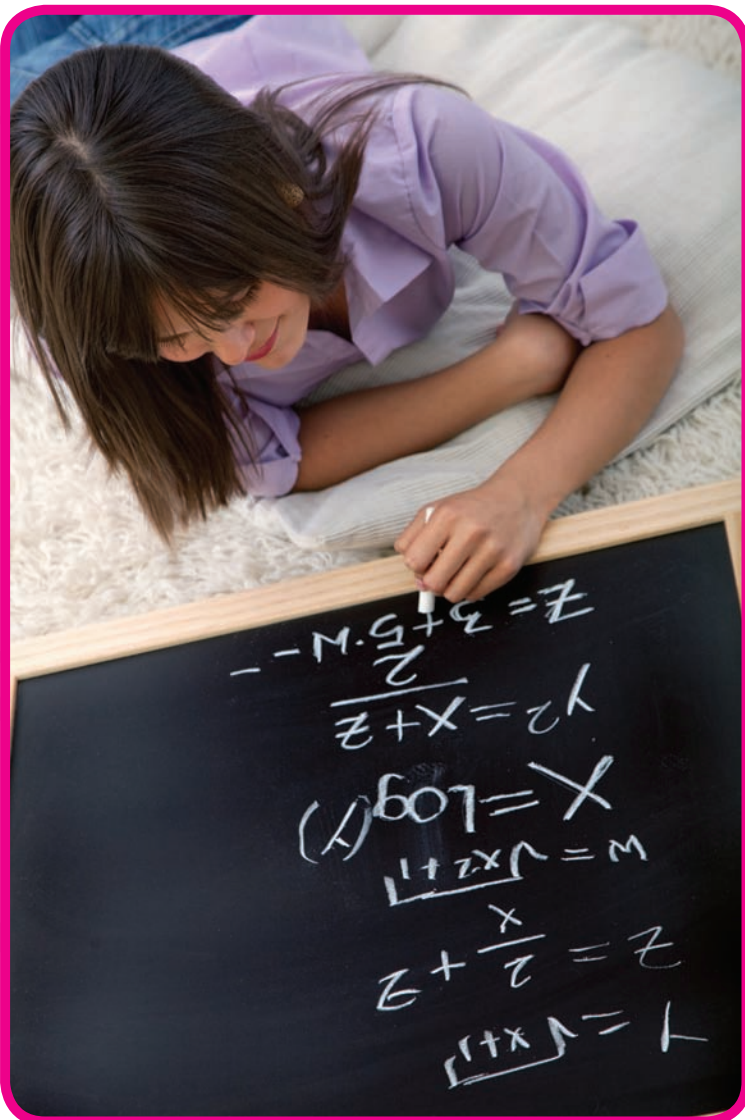
- b)** Al suponer que una concentración es de 1 gr. de alcohol en la sangre produce un riesgo del 80 % ( $R=80$ ) de sufrir un accidente, el valor de la constante baja a 2,6. Utilizando este valor de  $k$ , calcule el riesgo si la concentración de alcohol en la sangre es de 1,5 gr/litro.

**Sugerencia:** considere  $x = 1,5$  y  $k = 2,6$



## Guía de trabajo Nº 2

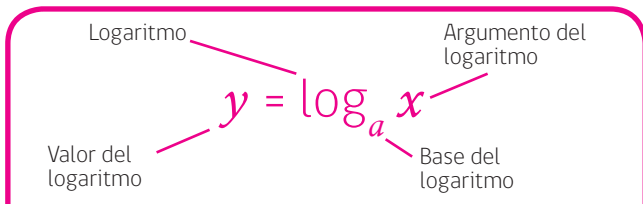
# Función Logaritmo



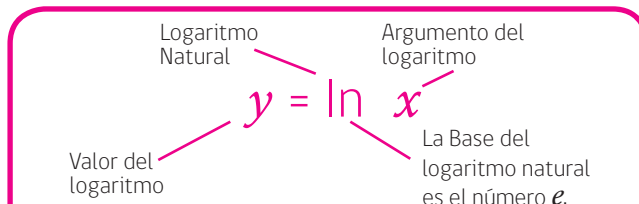
### Contenido

- Función logaritmo.
- Notaciones de logaritmo.
- Propiedades de la función logarítmica.
- Ecuaciones logarítmicas
- Gráfica de funciones logarítmicas.

## NOTACIONES DE LOGARITMO



**Logaritmo común:** todo logaritmo de base 10, es llamado logaritmo común:  
 $\log_{10} x = \log x$   $x > 0$   
 Cuando la base es 10, no se escribe la base del logaritmo.



**Logaritmo natural:** todo logaritmo de base  $e$ : es llamado logaritmo natural:  
 $\ln x = \log_e x$   
 Cuando la base es  $e$ , no se escribe la base del logaritmo y se escribe:  $\ln x$ . y se lee: logaritmo natural de  $x$



### ACTIVIDAD Formas equivalentes

A partir de la relación  $y = \log_a x \leftrightarrow x = a^y$ , complete las siguientes tablas:

Logaritmo		Exponencial
$3 = \log_8 512$	$\leftrightarrow$	$512 = 8^3$
$3 = \log_4 64$	$\leftrightarrow$	
$5 = \log_3 243$	$\leftrightarrow$	
$2 = \log_6 36$	$\leftrightarrow$	
$4 = \log 10.000$	$\leftrightarrow$	
$1 = \log 10$	$\leftrightarrow$	
$2 = \ln 7,3441$	$\leftrightarrow$	
$1 = \ln e$	$\leftrightarrow$	

Exponencial		Logaritmo
$81 = 3^4$	$\leftrightarrow$	$4 = \log_3 81$
$32 = 2^5$	$\leftrightarrow$	
$125 = 5^3$	$\leftrightarrow$	
$49 = 7^2$	$\leftrightarrow$	
$64 = 2^6$	$\leftrightarrow$	
$1.024 = 4^5$	$\leftrightarrow$	
$20,124 = e^3$	$\leftrightarrow$	
$1.000 = 10^3$	$\leftrightarrow$	



En la siguiente dirección:

<http://es.scribd.com/doc/22960622/LOGARITMOS-Y-CALCULADORA> se muestra la forma de determinar logaritmos y valores exponenciales utilizando la calculadora.

## LA FUNCIÓN LOGARITMO

La función logaritmo, corresponde a la función inversa de la función exponencial:

$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$

Si intercambiamos  $x$  por  $y$  resulta:  $x = a^y$ ,

$y$  es la potencia a la que se eleva  $a$  para obtener  $x$ .... / (\*),

reemplazando la palabra potencia por *logaritmo*, la expresión (\*) se puede escribir así:

" $y$ , es el *logaritmo* de  $x$  en base  $a$ ".

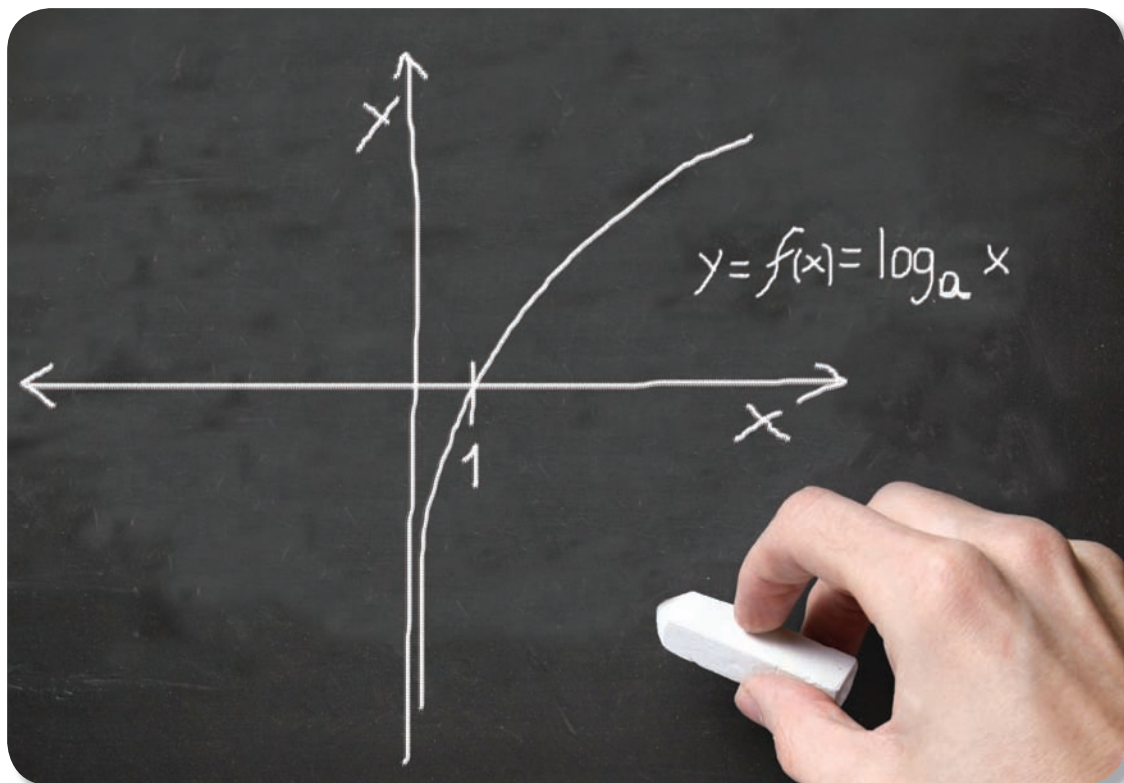
La expresión matemática correspondiente, queda escrita como:  $y = \log_a x$

$\therefore y = \log_a x$ , es equivalente a:  $x = a^y$



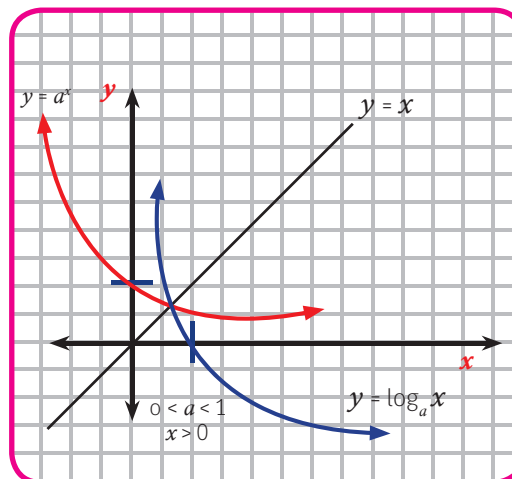
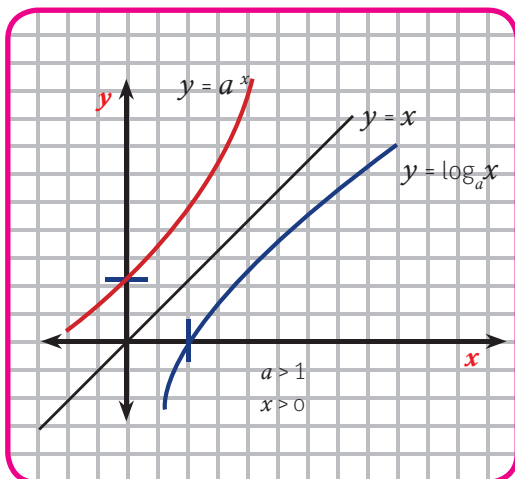
La función logaritmo es  $y = f(x) = \log_a x$   
corresponde a la función inversa de la función exponencial con base  $a$ .

### Gráfica general de la función logaritmo



## Comparación Gráfica función y exponencial

Observa en la gráfica, en rojo la curva de la función exponencial  $y = f(x) = a^x$  y en azul la función logarítmica de  $y = f(x) = \log_a x$



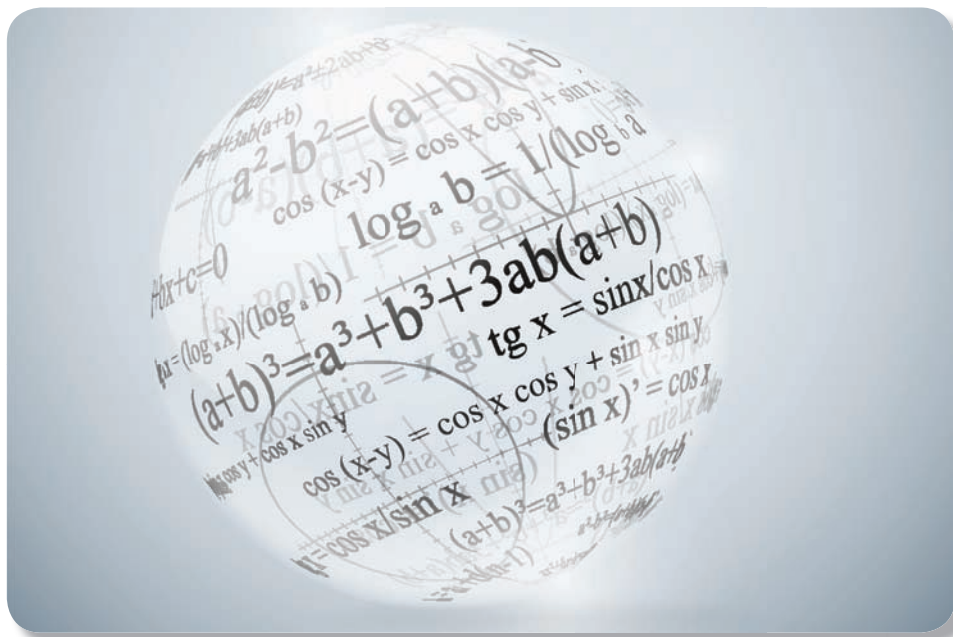
TIPS

- La gráfica de la recta  $y = x$  se muestra para expresar de mejor forma la simetría respecto de las funciones logarítmica y exponencial, que son una inversa de la otra.
- El valor de  $a$ , como base de la función exponencial y como base del logaritmo, de acuerdo con los valores que tome, se gráfica de diferentes formas.



Para profundizar más le invitamos a revisar este link:

[www.educarChile.cl/Portal.Base/web/vercontenido.aspx?ID=133267](http://www.educarChile.cl/Portal.Base/web/vercontenido.aspx?ID=133267)





## ACTIVIDAD

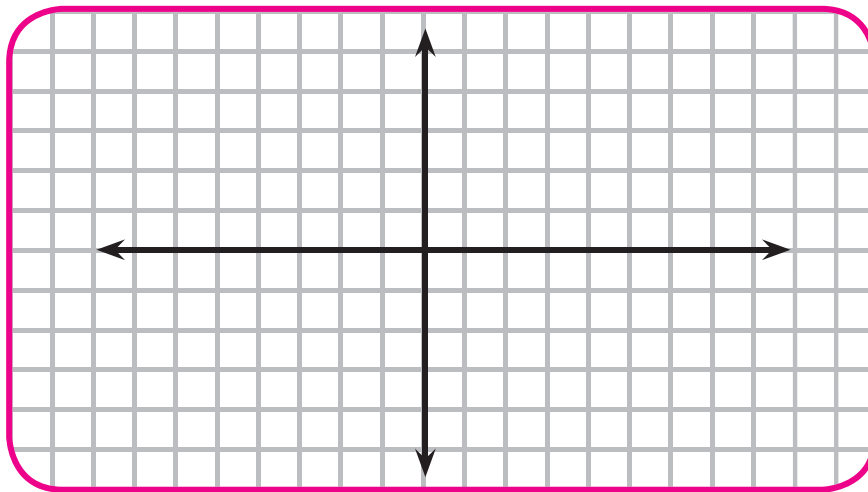
Con apoyo de calculadora, completa cada tabla de valores dada y luego esboza la gráfica de cada función logarítmica:

1) Dada la función  $y = f(x) = \log x$

a) Complete la tabla de datos:

$x$	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1.000	10.000
$y = \log x$								

b) Realice la gráfica:

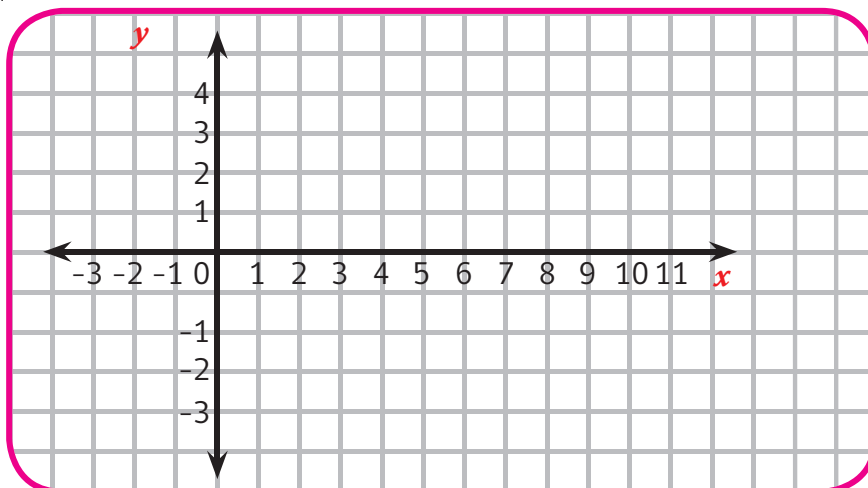


2) Dada la función  $y = f(x) = \ln x$

a) Complete la tabla de datos:

$x$	0,05	0,14	0,37	1	2			
$y = \ln x$								

b) Esboce la gráfica:



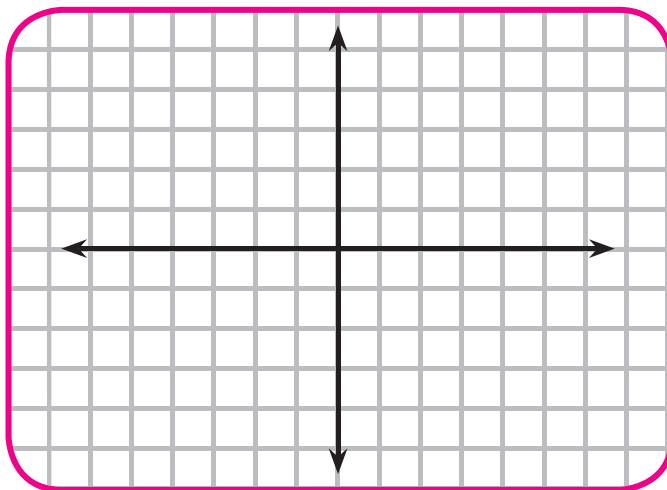
## Educación Matemática - MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

3) Dada la función  $y = f(x) = \log(x+2)$

a) Complete la tabla de datos:

$x$	-1,999	-1,99	-1,5	-1	-0,5	0	8	92
$y = \log(x+2)$								

b) Realice la gráfica:

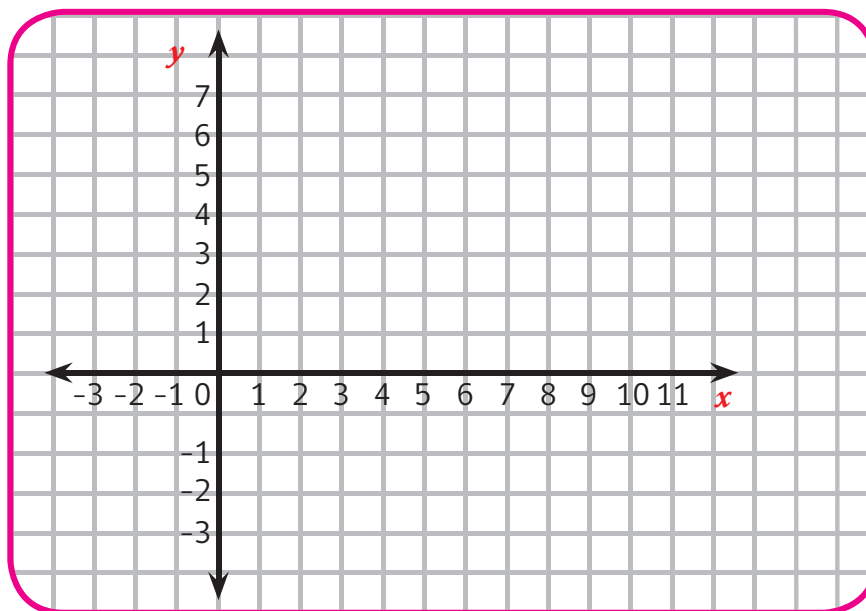


4) Dada la función  $y = f(x) = \ln(x-2)$

a) Complete la tabla de datos:

$x$	2,001	2,01	2,1	2,5	$e$	3	$e^2$	$e^3$
$y = \ln(x-2)$								

b) Realice la gráfica:



## Propiedades de la función logaritmo.

Todos los logaritmos de cualquier base poseen propiedades comunes, estas propiedades son:

1)	Logaritmo de la unidad es cero	$\log_a 1 = 0$
2)	Logaritmo de la base es la unidad	$\log_a a = 1$
3)	Logaritmo de una potencia en la misma base es el exponente de la potencia.	$\log_a a^x = x$
4)		$a^{x \log_a} = x$
5)	Logaritmo de un producto, es la suma de los logaritmos de los factores	$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
6)	El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
7)	El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:	$\log_a x^c = c \cdot \log_a x$
8)	El logaritmo de una raíz de índice n es igual al recíproco del índice por el logaritmo de la cantidad subradical.	$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$

### Ejemplos:

- 1)  $\log_5 (5x) = \log_5 5 + \log_5 x$
- 2)  $\log_3 \left(\frac{x}{81}\right) = \log_3 x - \log_3 81$   
 $= \log_3 x - 4$
- 3)  $\log_4 64^5 = 5 \cdot \log_4 64 = 5 \cdot \log_4 (4)^3$   
 $= 5 \cdot 3 \cdot \log_4 4 = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$
- 4)  $\log 10^x = x \log 10 = x \cdot 1 = x$
- 5)  $\ln 1 = 0$



Actividad en el cuaderno

Utilizando la propiedad de los logaritmos, separa la expresión  $\log_5 125a$ , en logaritmos simples que no se pueden descomponer

## ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Las propiedades de las funciones exponenciales y logaritmos, tratadas anteriormente, nos permiten resolver una serie de problemas relacionados con las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.



### ACTIVIDAD

Aprendamos a resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas:



**Ejemplo 1:** Resolvamos la ecuación  $5^x = 125$

Puede utilizar dos formas:

### FORMA 1

$$5^x = 125$$

$$\log_5 5^x = \log_5 125$$

Aplicando función logaritmo, en base 5 a ambos lados de la igualdad.

$$x \cdot \log_5 5 = \log_5 125$$

Aplicando propiedad de logaritmo:  
 $\log_b a^x = x \cdot \log_b a$

$$x \cdot 1 = \log_5 125$$

Propiedad:  $\log_a a = 1$

$$x = \log_5 5^3$$

Propiedad de las potencias

$$x = 3 \log_5 5$$

Propiedad de logaritmo  
 $\log_b a^x = x \cdot \log_b a$

$$x = 3 \cdot 1$$

$$x = 3$$

Aplicando propiedad de logaritmo  $\log_a a = 1$

### FORMA 2

$$5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

Igualando bases

$$x = 3$$

Como las bases son iguales. Por lo tanto los exponentes deben ser iguales.







**Ejemplo 2:** Resolvamos la ecuación  $9^x = 130$

En este caso no es posible expresar 130 como potencia de base 9 por lo tanto aplicaremos la función logaritmo.

$$9^x = 130$$

$$\log_9 9^x = \log_9 130$$

/ Aplicando la función logaritmo, en base 9.

$$x \cdot \log_9 9 = \log_9 130$$

/ Aplicando propiedades de los logaritmos.

$$x = \frac{\log 130}{\log 9}$$

/ Aplicando cambio de base para calcular el logaritmo común.

$$x = \frac{\log 130}{0,9542}$$

/ Haciendo el cálculo de los logaritmos.

$$x = 2,2153$$



Actividad en el cuaderno

Dadas las ecuaciones exponenciales, resuélvalas en su cuaderno utilizando algunas de las formas trabajadas:

1)  $7^x = 343$

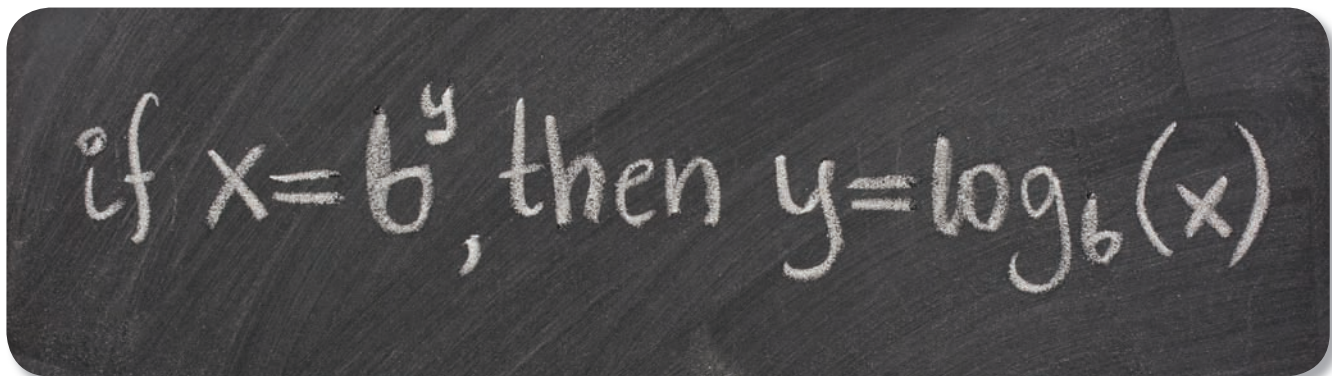
4)  $2^x = 256$

2)  $5^x = 125$

5)  $4^x = 100$

3)  $6^x = 36$

6)  $9^x = 81$





TIPS

### Consideraciones en la solución de ecuaciones logarítmicas

Ecuación logarítmica

Para resolver ecuaciones logarítmicas debemos aplicar propiedad:

$$\log x = \log y \Leftrightarrow x = y$$



### Ejemplo:

1) Resolvamos la ecuación  $\log(10x - 1) = \log(x + 4)$

Considerando que tenemos logaritmos de igual base, para que se cumpla la igualdad los argumentos también deben ser iguales.

$$10x - 1 = x + 4 \quad / \quad \text{Despejando } x:$$

$$10x - x = 4 + 1$$

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

2) Resolvamos la siguiente ecuación logarítmica.

$$\log x - \log(x-4) = -1 \quad / \quad \text{Utilizando la propiedad de resta de logaritmos tenemos:}$$

$$\log \frac{x}{x-4} = -1$$

/ Intentaremos tener expresiones con logaritmos a ambos lados de la igualdad, para eso expresaremos  $-1$  como logaritmo de base 10.

$$\log \frac{x}{x-4} = \log \frac{1}{10} \quad / \quad \text{Ahora igualamos argumentos:}$$

$$\frac{x}{x-4} = \frac{1}{10}$$

/ Despejamos  $x$ :

$$10x = x - 4$$

$$10x - x = -4$$

$$9x = -4$$

$$x = \frac{-4}{9}$$



Actividad en el cuaderno

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1)  $\log x - \log(x + 2) = \log 2$

2)  $\log(x + 5) + \log(2x + 7) = 1$

3)  $\log 10 = \log(x + 4) - \log(x - 5)$

**ACTIVIDAD****Resolver el problema utilizando la función logaritmo:**

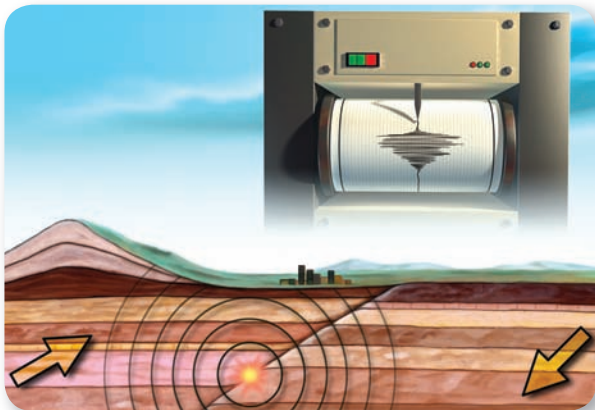
A continuación se exponen ejercicios, en los que, en algunas etapas; hay que completar los pasos de resolución:

**1)** Chile está ubicado en una franja geográfica llamada Cordón de fuego del Pacífico, donde se producen una gran cantidad de temblores y por la alta concentración de volcanes activos que existen en su territorio, somos uno de los países con mayor extensión de montañas en el planeta. Pero, no tan solo esto hace peligroso vivir en este país, su ubicación sobre una de las placas tectónicas que rodean el océano Pacífico con más movimiento de la Tierra, convirtiéndolo en uno de los países más sísmicos del mundo y donde se han registrado los terremotos más fuertes en la historia de nuestro planeta.

Los terremotos son medidos por medio de dos escalas: la de Richter, que mide la magnitud de un sismo y que da a conocer la energía liberada, y la escala de Mercalli, que representa la violencia con que se siente un sismo en diversos puntos de la zona afectada, siendo más subjetiva porque la intensidad aparente de un terremoto depende de la intensidad del epicentro a la que se encuentra el observador; es una escala que va de I a XII, y describe y puntúa los terremotos más en términos de reacciones y observaciones humanas que en términos matemáticos, a diferencia de la escala de Richter. Esta mide la energía del sismo en su epicentro y se basa en su modelamiento logarítmico común de la amplitud máxima de la onda medida en milímetros por medio de la función:

$M = \log ( A \cdot 10^3 )$ , donde:  $M$ : es la magnitud del sismo.

$A$ : Amplitud del sismo medida en milímetros (mm) en un sismógrafo.



El sismógrafo, mide la amplitud del movimiento telúrico.

En este caso, el sismo tuvo una amplitud de 23 mm:

- a) Calcular la magnitud del sismo.
- b) ¿Qué magnitud tiene un sismo de amplitud 25 mm?**
- c) Completar la tabla y graficar para las diversas amplitudes de sismos:

**Solución**

**Complete lo que falta en cada caso:**

a) Para calcular la magnitud del sismo evaluamos  $A=23$  mm en:

$$M = \log ( A \cdot 10^3 ) \longrightarrow M = \log ( \dots \cdot 10^3 ) = \dots$$

b) Para calcular la magnitud del sismo evaluamos  $A=25$  mm en:

$$M = \log ( A \cdot 10^3 ) \longrightarrow M = \log ( \dots \cdot 10^3 ) = \dots$$

**TIPS**

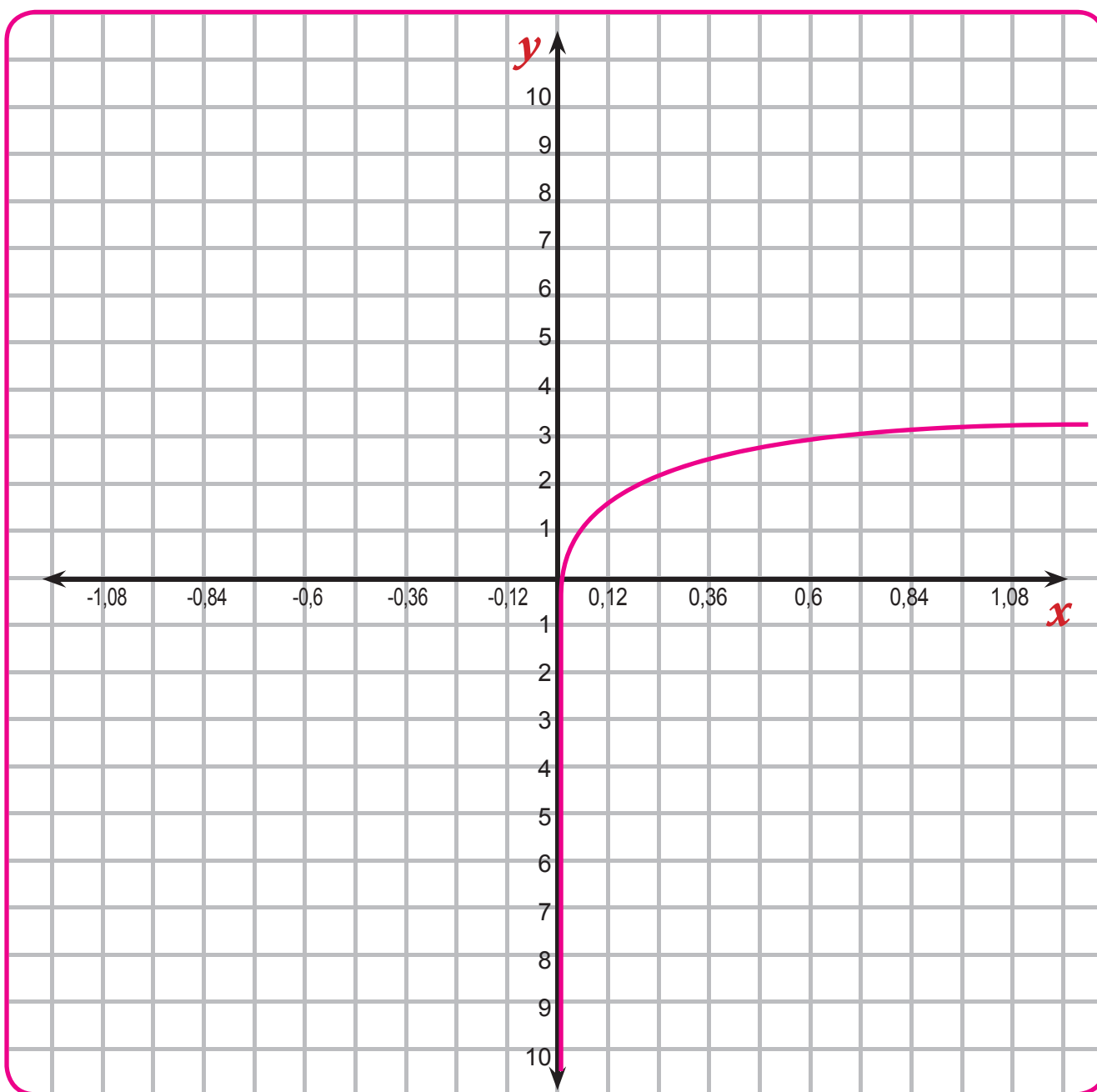
La escala de Richter, que mide la magnitud de un terremoto, se escribe en términos logarítmicos

## Educación Matemática - MODELANDO EL MUNDO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

c) Complete la tabla dada:

$A$ (Amplitud del sismo en mm)	0,001	0,01	0,1	1	4	8	10	12
$M$ (Magnitud del sismo escala Richter)	0			3		3,9		

Grafique la función:  $M = \log(A \cdot 10^3)$  con los datos de la tabla:





Actividad en el cuaderno

Resuelva de acuerdo a lo indicado:

**1)** La sonoridad es medida en decibeles, y para realizar esta medición son necesarios los logaritmos.

La medición del volumen está dado por la función logarítmica:

$$v(x) = 10 \log \left( \frac{x}{10^{-12}} \right) \quad \text{donde,}$$

$x$ : intensidad del sonido medida en vatios por metro cuadrado.



- a) Realice una tabla para este problema.
- b) Realice una gráfica de la función volumen.
- c) En una sala de clases se registra una intensidad de sonido de 10 vatios por metro cuadrado.  
**¿Cuál es volumen del ruido de la sala de clases?**

**2)** El riesgo que corre una persona de sufrir un accidente automovilístico si ha bebido alcohol está dado aproximadamente por  $R(x) = 6,5 e^{kx}$ , donde  $R$  corresponde al porcentaje de riesgo y  $x$  corresponde a la concentración de alcohol (en gramos por litro de sangre).

- a) La función modela una situación de crecimiento o decrecimiento. **¿Por qué?**
- b) Determinar  $k$ , si se sabe que una concentración de 0,05 g/l corresponde a un 15% ( $R = 15$ ) de riesgo.



3) El número de personas contagiadas por un virus de una población  $P_0$  se modela mediante la siguiente función:

$$N(t) = \frac{P_0}{1,2 + 2.000 e^{-0,7t}}, \text{ donde } t \text{ está en días.}$$



a) ¿Cuántas personas estarán infectadas después de 15 días si la población es de 2.000 personas?

b) ¿En cuánto tiempo estará infectada la mitad de la población inicial?

4) Determine el valor de las siguientes expresiones:

a)  $\log_6\left(\frac{1}{36}\right) + \log\left(\frac{1}{25}\right) - \log(100)$

b)  $\frac{\log_6 \frac{1}{36} + \log_9 81}{\log_5 \sqrt[3]{125}}$



5) Aplicando las propiedades de los logaritmos, desarrolle las siguientes expresiones:

a)  $\log \sqrt[6]{\frac{3a}{a^{-1/6}}}$

b)  $\log \frac{5a \sqrt[7]{x}}{5 \sqrt[4]{x^3}}$

## FORMA DEL GRÁFICO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Gráfico de la función exponencial decreciente

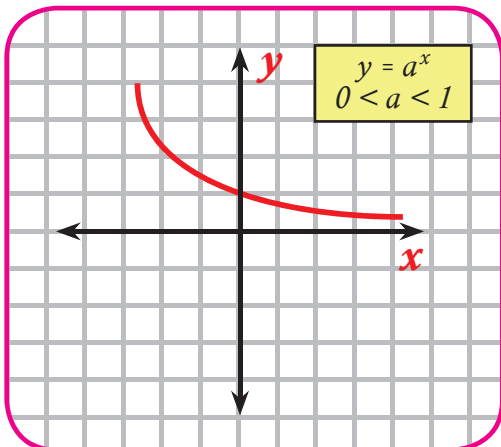


Gráfico de la función exponencial

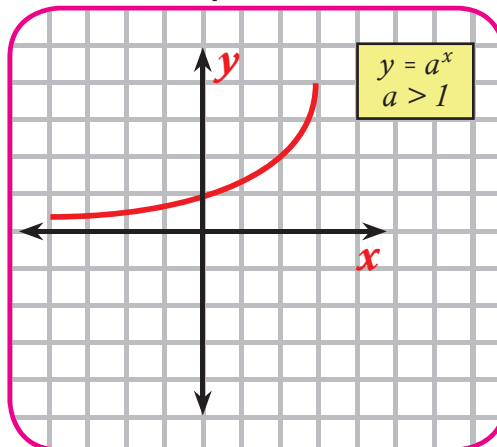


Gráfico de la función logarítmica decreciente

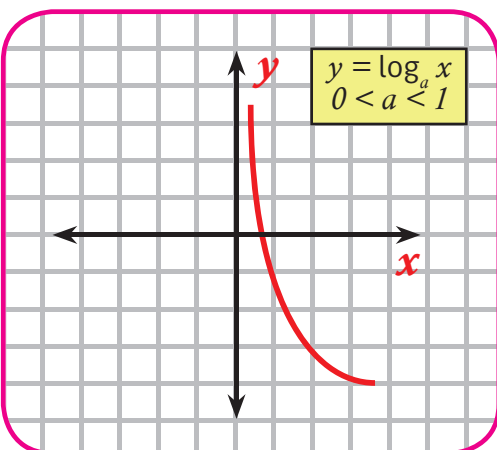
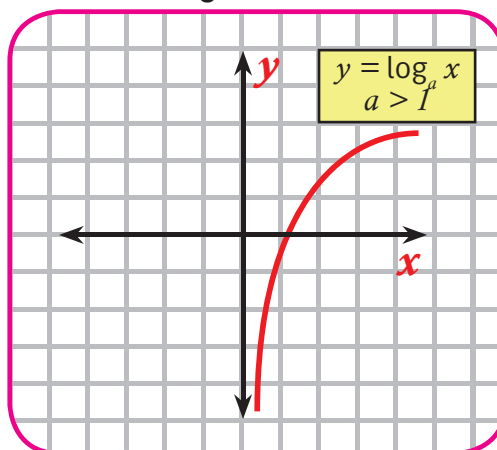


Gráfico de la función logarítmica

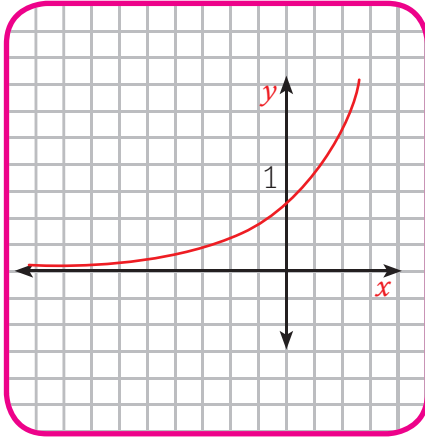


¿Qué es  $a$ ?  
¿Qué es  $\log_a x$ ?  
¿Qué es  $a^x$ ?

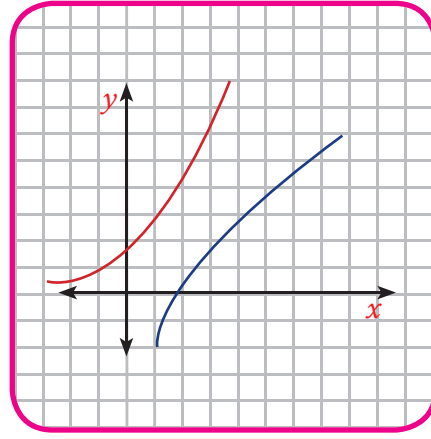


**ACTIVIDAD**

Observando atentamente cada gráfica. Escribe el nombre de la función que le corresponda a cada una según su forma:

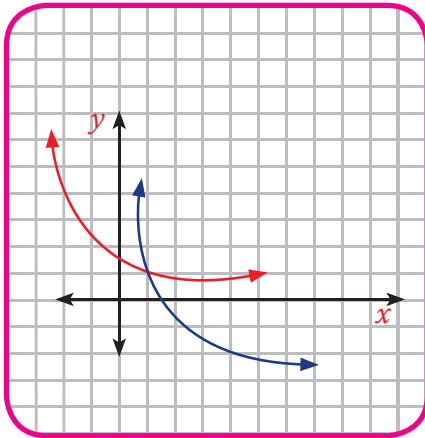


Función: .....



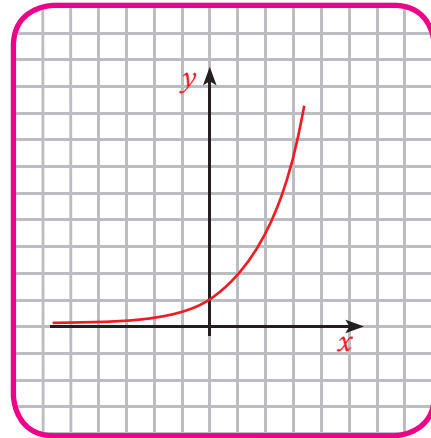
Función color rojo: .....

Función color azul: .....

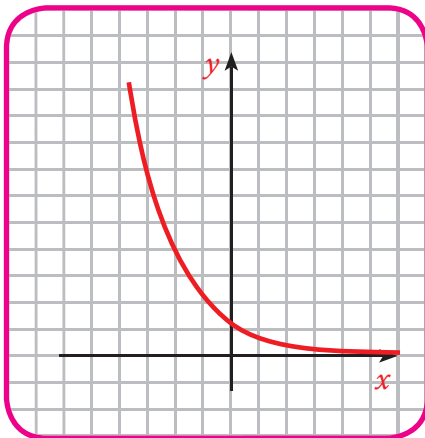


Función color rojo: .....

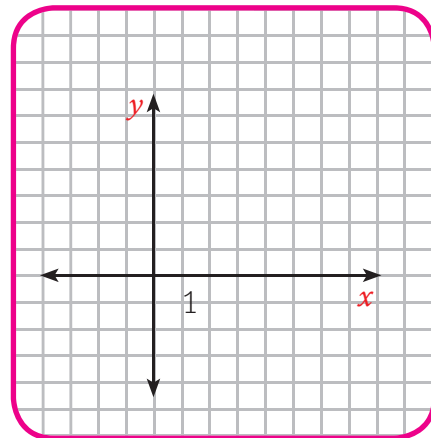
Función color verde: .....



Función: .....



Función: .....

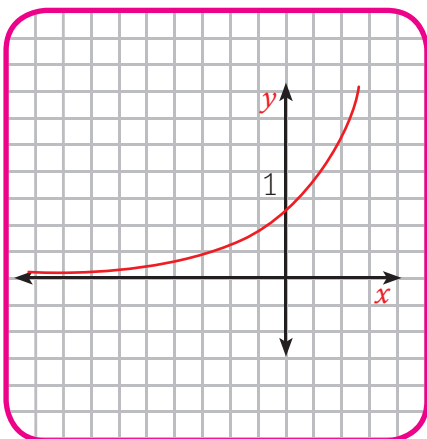


Función: .....



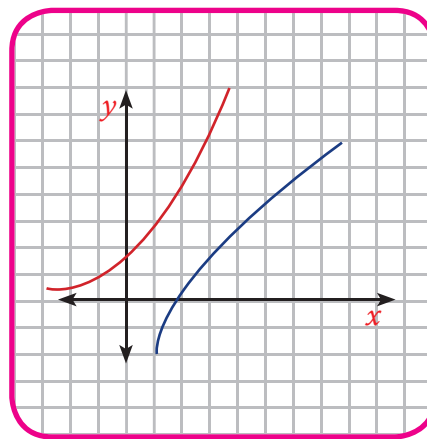


**ACTIVIDAD** Asocie cada función con la gráfica que la representa, uniendo con una línea:



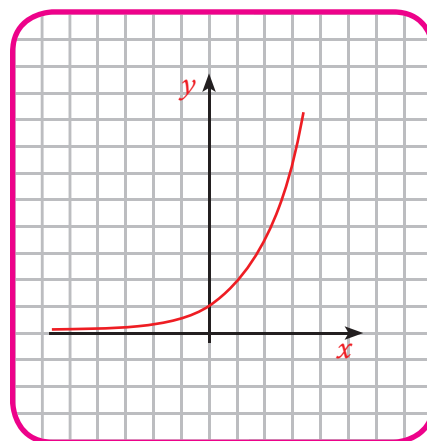
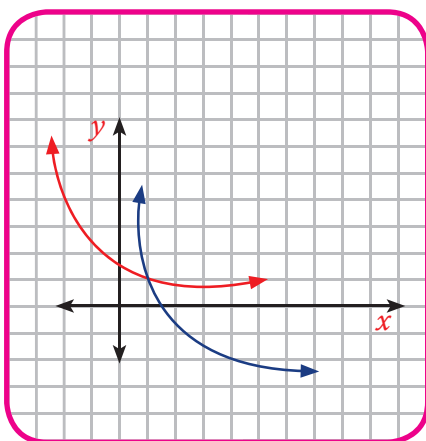
a)  $y = \log x$

c)  $y = \left(\frac{x}{2}\right)^x$



b)  $y = 2^x$

d)  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$



1/2 0% 5 ( = ) 9/6 \$ 4



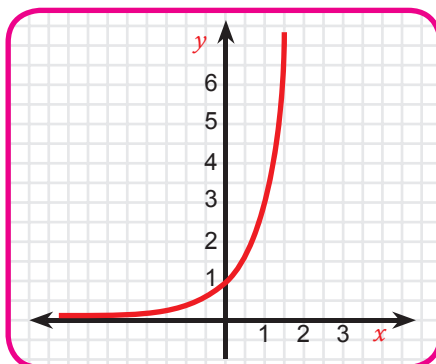
Selección Múltiple:

Marque con una **X** la alternativa correcta:

1) La gráfica

Corresponde a:

- a)  $y = e^x$
- b)  $y = 3^x$
- c)  $y = e^{-x}$
- d)  $y = 3$



2) Al aplicar la definición de logaritmo a la expresión  $y = \log_e b$ , se obtiene:

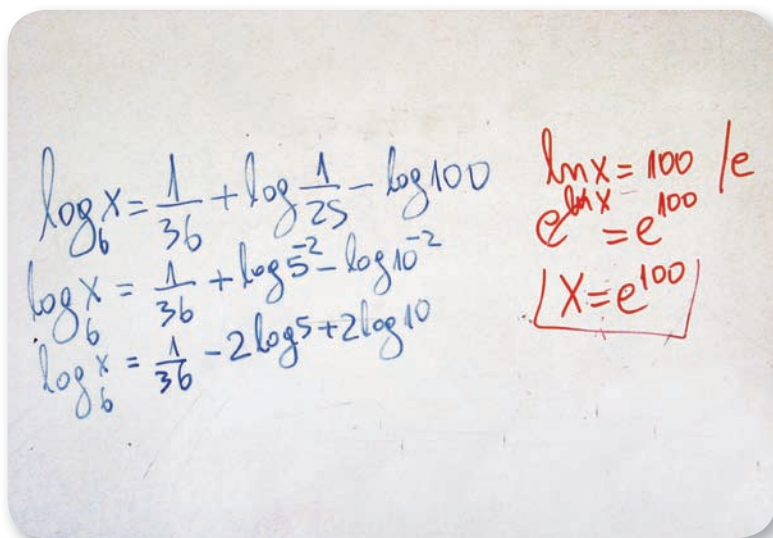
- a)  $b = e^y$
- b)  $b = y^e$
- c)  $e = b^y$
- d)  $e = x^e$

3) El valor de  $\log_3 27$  es:

- a) 0,3
- b) 1
- c) 3
- d) 6

4) Si  $\log_a 9 = 2$ , entonces  $a$  es:

- a) -3
- b) 1/3
- c) 0,5
- d) 3



5) ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a:  $\log_x \sqrt[4]{\frac{ax}{c}}$

- a)  $4 \log_x a + 4 \log_x c - 1$
- b)  $\frac{1}{4} \log_x a - \frac{1}{4} \log_x c + \frac{1}{4}$
- c)  $\frac{\log_x a + 1 + 4 \log_x c}{4}$
- d)  $4 \log_x a + 4 \log_x c + 1$

## Segundo nivel o ciclo de Educación Media - Guía Nº 3

6) El valor  $3^x + 3^{x+1}$  es igual a:

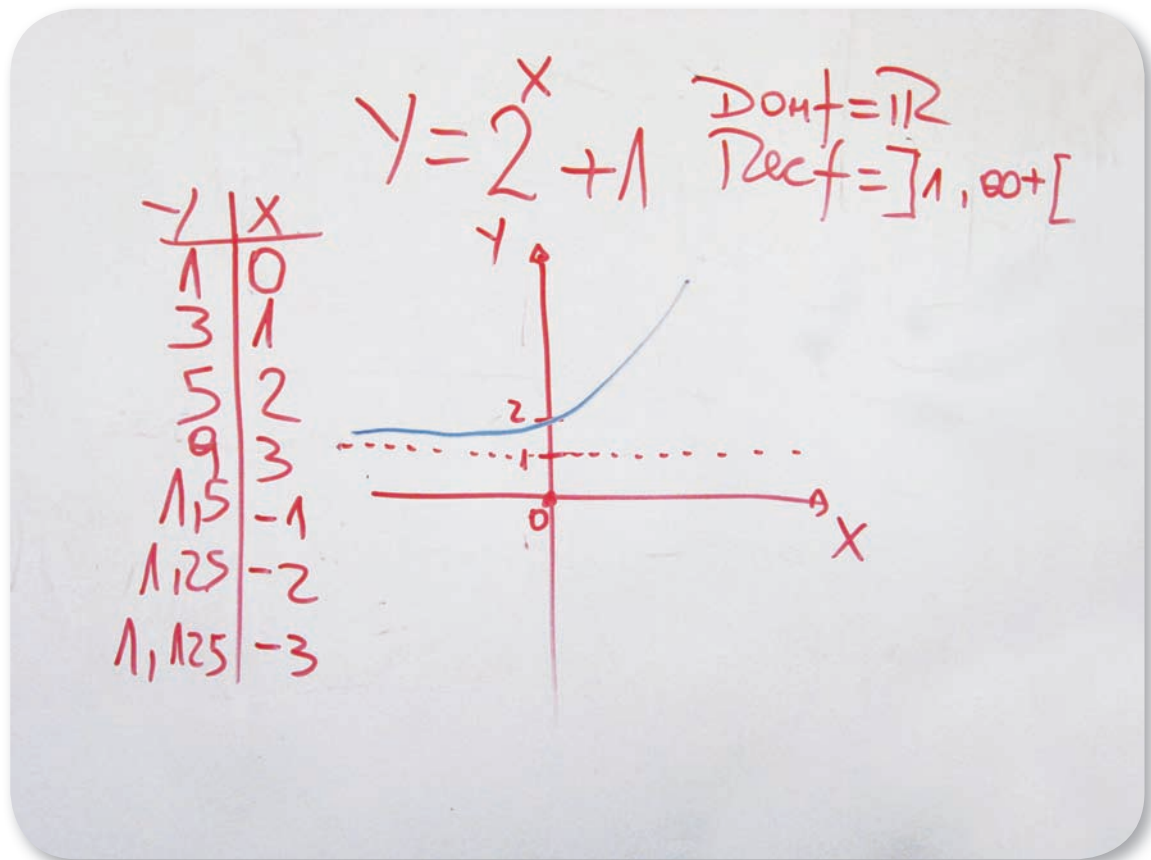
- a)  $3 \cdot 3^{x+1}$
- b)  $4 \cdot 3^x$
- c)  $2 \cdot 3^{2x+1}$
- d)  $3^{2x+1}$

7) Si  $f(t) = \frac{25}{48 + 12 \cdot 6^{-25t}}$ , ¿Qué valor tiene  $f$  para  $t = \frac{1}{25}$ ?

- a)  $\frac{25}{40}$
- b) 25
- c)  $\frac{25}{42}$
- d)  $\frac{1}{2}$

8) Si  $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ , entonces  $f(2)$  es igual a:

- a) 10
- b) 80
- c) -1
- d)  $\frac{40}{41}$



**Bibliografía:**

1. Decreto Supremo de Educación N° 211 de 2009 que reemplaza el Decreto N° 131 de 2003 sobre nivelación de estudios de adultos. MINEDUC.
2. Decreto Supremo de Educación N° 257 de 2009 que deroga Decreto Supremo de Educación N° 239 de 2004 sobre el marco curricular de la educación de adultos.
3. Peterson, John A. y cols. (1969). Teoría de la Aritmética. Ciudad de México, México: Editorial Limusa-Wiley.
4. Zill, D. y Dewar, J. (1996) Álgebra y Trigonometría. McGraw-Hill. Ciudad de México, México: Editora Prentice Hall.
5. Swokowski, E. y Cole, J. (2002). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 12° Edición. Ciudad de México, México: Editorial Cengage.
6. De Oteyza, E, Hernández, C. y Lam, E. (1996). Álgebra. Ciudad de México, México: Editorial Prentice Hall.
7. Campos, X y Cruz, X. (2003). Álgebra. Santiago, Chile: Editorial Arrayán.
8. Páginas de Internet recomendadas:

**Guía de trabajo número 2:**

<http://www.hverdugo.cl/matematica/segundo/guias/logaritmos.pdf>  
<http://www.profesorenlinea.cl/matematica/logaritmo.html>  
<http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm>  
<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/funciones3/impresos/quincena10.pdf> (página 172)  
<http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?GUID=d9fe1a06-9854-45e2-ac94-6dca986b11a0&ID=209681>

**Para graficar funciones:**

[www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) (programa descargable y gratuito)  
<http://www.disfrutalasmatematicas.com/graficos/grafico-funciones.php>



