Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Guía de Aprendizaje Nº 4

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA: HERRAMIENTAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Educación Matemática
Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media
para Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Guía de Aprendizaje Nº 4

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA: HERRAMIENTAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Educación Matemática

Segundo Nivel o Ciclo de Educación Media

para Educación para Personas Jóvenes y Adultas

Avda. Bernardo O'Higgins 1371, Santiago de Chile

Guía de Aprendizaje N°4
GEOMETRĪA Y TRIGONOMETRĪA: HERRAMIENTAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Primera edición, año 2013
Inscripción Nº 236.046

Autores:
Mauricio Huircán Cabrera
Katherina Carmona Valdés

Colaboradores:
Nicolás de Rosas Cisterna, Rosita Garrido Labbé,
María Angélica Contreras Fernando, Pablo Canales Arenas y Carolina Marambio Cárcamo.
Walter Roberto Valdivieso Sepúlveda, Manuel Ernesto Urzúa Bouffanais.

Edición:
Jose Luis Moncada Campos

Revisión editorial matemática:
Carla Falcón Simonelli

Coordinación Nacional de Normalización de Estudios
División de Educación General

Impreso por:
RR Donnelley

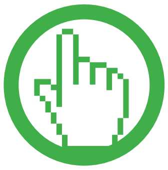
Año 2013
impresión de 99.000 ejemplares

Iconografía

Información

Atención

Tips



Página Web

Actividad

Actividad en el cuaderno

Evaluación

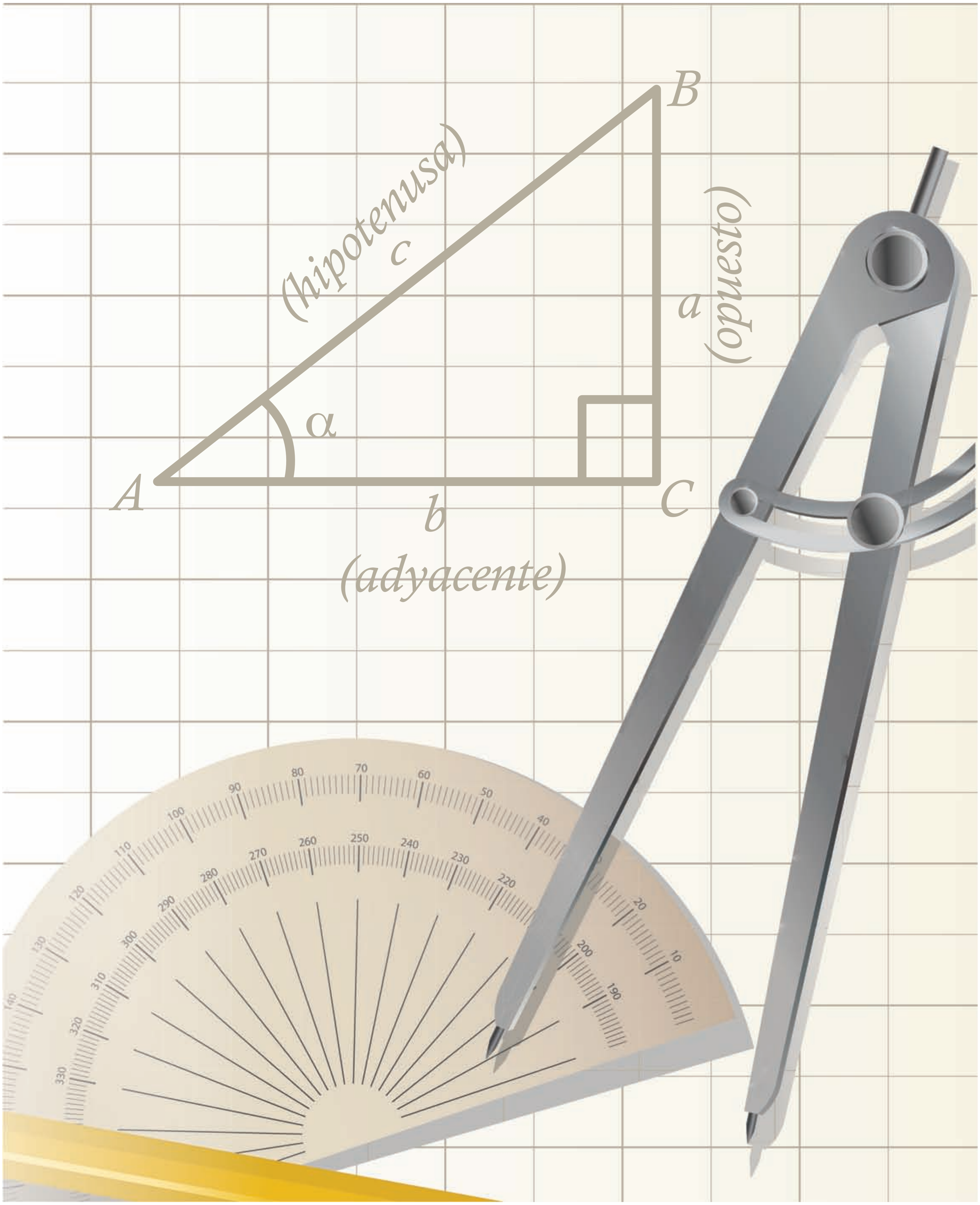
Presentación

El material que la Coordinación Nacional de Educación de Adultos del Ministerio de Educación (Mineduc) pone a su disposición, pretende ser una herramienta de apoyo a los estudiantes del último nivel de educación media, ya sea de la modalidad regular o flexible. En él se mantiene la propuesta didáctica de las guías anteriores, que desarrolla el trabajo desde lo más simple a lo más complejo y, a la vez, fomenta la explicación cuidadosa y ordenada de los conceptos matemáticos tratados.

En esta guía se abordan contenidos de semejanza de figuras planas y trigonometría aplicados a la resolución de situaciones de la vida real.

Las unidades enfatizan ejemplos resueltos y entregan otros que se solucionan con apoyo del profesor o profesora, o en trabajos de grupos o individuales. Todo con la finalidad de fomentar la rigurosidad y precisión del uso de los conceptos matemáticos que se tratan.

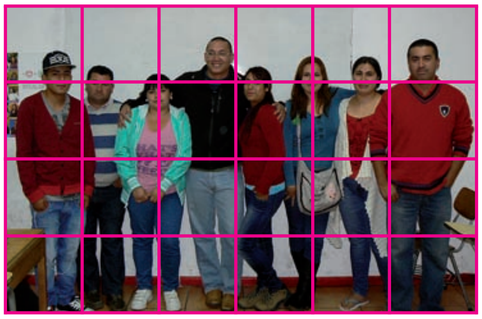
Es importante destacar que el proceso de aprendizaje de las matemáticas y otras ciencias es personal y pasa por la dedicación y trabajo de la persona que aprende, por lo que le invitamos a trabajar de manera muy dedicada esta guía y a descubrir herramientas matemáticas que podrán ser parte de su vida.


B
(hipotenusa)
c
a
(opuesto)
α
A
C
b
(adyacente)

Guía de trabajo Nº 1

Semejanza de figuras planas

FOTO 1



En la vida cotidiana; cuando se habla de semejanza, se asocia con un objeto o elemento que se parece a otro. En matemática, el concepto de semejanza, se asocia con proporcionalidad. Un mapa es una representación proporcional, pequeña, de la realidad, al igual que una fotografía.

FOTO 2

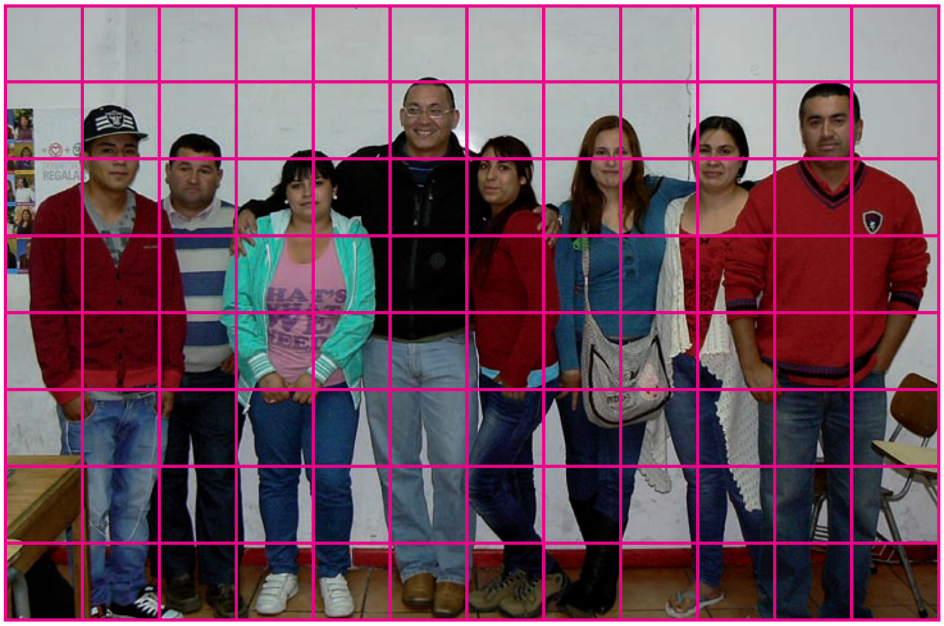
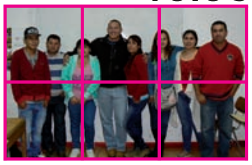


FOTO 3



Contenidos

- **Escalas numéricas.**
- **Semejanza de figuras planas.**
- **Teorema General de Thales.**

Al observar las fotografías, se puede notar que las tres fotografías son iguales, poseen la misma figura y forma pero diferentes tamaños, es decir, la fotografía 3, es la **reducción** de la fotografía 1 y la fotografía 2 es la **ampliación** de la fotografía 1. **Ampliación de una figura:** Es una nueva figura igual a la original, pero con sus medidas aumentadas. **Reducción de una figura:** Es una nueva figura igual a la original, pero con sus medidas disminuidas.

TIPS

En general cuando dos imágenes poseen la misma forma pero diferentes tamaños, se dice que una está a **escala** de la otra, lo que desde el punto de vista de las matemáticas, significa que son figuras semejantes.

ACTIVIDAD

Observe las fotografías de distintos tamaños y responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cuadros mide cada lado de las fotagrafías 1, 2 y 3?

Foto 1: ....

Foto 2: ....

Foto 3. ....

b) ¿Cuál es la relación entre el número de cuadros del ancho y del alto de las fotagrafías 1, 2 y 3?

Número de cuadros del ancho foto 1 .... y alto foto 1..........

Número de cuadros del ancho foto 2 .... y alto foto 2..........

Número de cuadros del ancho foto 3 .... y alto foto 3..........

¿Qué diferencias observas entre los cuadros de las fotografías? ....

c) ¿Cuál es la razón de ampliación de la fotografía 1? ¿Por qué?

....

....

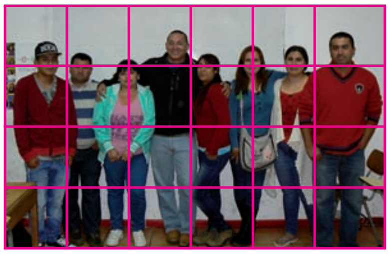
d) ¿Cuál es la razón de reducción de la fotografía 1? ¿Por qué?

....

....

ESCALA NUMÉRICA O RAZÓN DE SEMEJANZA

D C

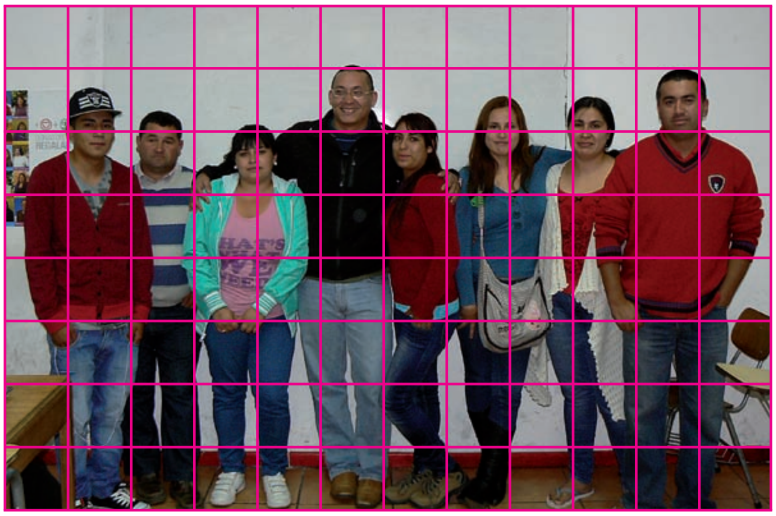


A B

FOTO 1

Observe que en las imágenes que se presentan a continuación: La **ampliación** de la fotografía uno, resultó de multiplicar los cuadrados del largo y del ancho por dos, obteniéndose la fotografía dos.
La **reducción** de la fotografia uno, resultó de dividir los cuadrados del largo y del ancho por dos, obteniéndose la fotografía tres.

D' C'



A' B'

FOTO 2

D'' C''

A'' B''

FOTO 3

Analizaremos lo que ocurre con la escala del largo de la fotografía:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{6^{:6}}{12^{:6}} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ y } \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{6}{3} = 2$$

TIPS

Cuando dos figuras son semejantes, se habla de razón de semejanza. En el caso tratado:

a) La escala es: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{6^{:6}}{12^{:6}} = \frac{1}{2} = 0,5$. La fotografía 1 representa a la fotografía 2 en escala de 1:2.

b) $\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{6}{3} = 2$. La fotografía 2 representa a la fotografía 1 en la escala de 2:1.

Actividad en el cuaderno

Determine la razón de semejanza entre las fotografías 1 y 2; 1 y 3; 2 y 3.

Ejemplos:

1) Daniel quiere hacer un plano de la pieza que ocupan de bodega para distribuir mejor las herramientas y materiales, ésta es rectangular y mide 6 metros de largo por 3 metros de ancho.

Solución:

a) Transforme las unidades a centímetros:

6 m = 600 cm. **¿Cómo obtuvo estas medidas?** ....

3 m = 300 cm.

TIPS

Según el diccionario de la RAE, un plano es una representación esquemática, en dos dimensiones y a determinada escala, de un terreno, una población, una máquina, una construcción, etc.

b) Divida por 40 las dimensiones reales para establecer una escala:

600 : 40 = 15

300 : 40 = 7,5

Luego dibuje un rectángulo de 15 cm de largo por 7,5 cm de ancho.
Este rectángulo es un plano de la bodega, a escala 1:40.

Nota: Si la razón de la escala 1 : 40, se considera como la fracción $\frac{1}{40}$, el tamaño del objeto en el plano se obtiene multiplicando sus medidas lineales de la realidad por esa fracción.

Observe:

$$600 \bullet \frac{1}{40} = \frac{600}{40} = 15 \text{ cm y } 300 \bullet \frac{1}{40} = \frac{300}{40} = 7{,}5 \text{ cm}$$

c) Las dimensiones del objeto en el plano son proporcionales a sus dimensiones reales; la escala de 1:40 es la razón de proporcionalidad.

2) En un mapa a escala 1:500.000, la plaza de Lampa y la plaza Guarello de San Bernardo se encuentran a 10 cm. **¿Cuál es la distancia real entre las dos plazas?**

Solución:

Se establece la proporción:

$$\frac{1}{500.000} = \frac{10}{x}$$

Aplicando la propiedad de las proporciones:

$x = 10 \cdot 500.000$

$x = 5.000.000$ cm = 50 Km

TIPS

1 km = 1.000 m = 100.000 cm

3) La fotografía de la figura tiene un largo de 8 cm y su ancho de 5 cm. se debe ampliar 4 veces, es decir, con una escala de 4:1. **¿Cuáles son las medidas de la ampliación?**

Solución:

Se multiplica cada medida por 4:

$8 \cdot 4 = 32$ cm y $5 \cdot 4 = 20$ cm

TIPS

Sea r la razón de proporcionalidad:

$r < 1$ La escala representa una **reducción** de la figura original.

$r = 1$ **No** hay ampliación ni reducción de la figura original. La escala recibe el nombre de escala natural, las figuras son congruentes entre sí.

$r > 1$ La escala representa una **ampliación** de la figura original.

Actividad en el cuaderno

Resuelva cada situación:

1) En un plano a escala 1:300, las medidas de la bodega de una maestranza son de 15 cm de largo y 10 cm de ancho.

a) ¿Cuáles son las medidas reales en metros de la bodega?

b) Un camión con acoplado de 23 metros de largo al entrar al galpón,

¿se puede estacionar a lo ancho de la bodega?

c) Si el galpón se amplía 15 metros de ancho y 10 metros de largo.

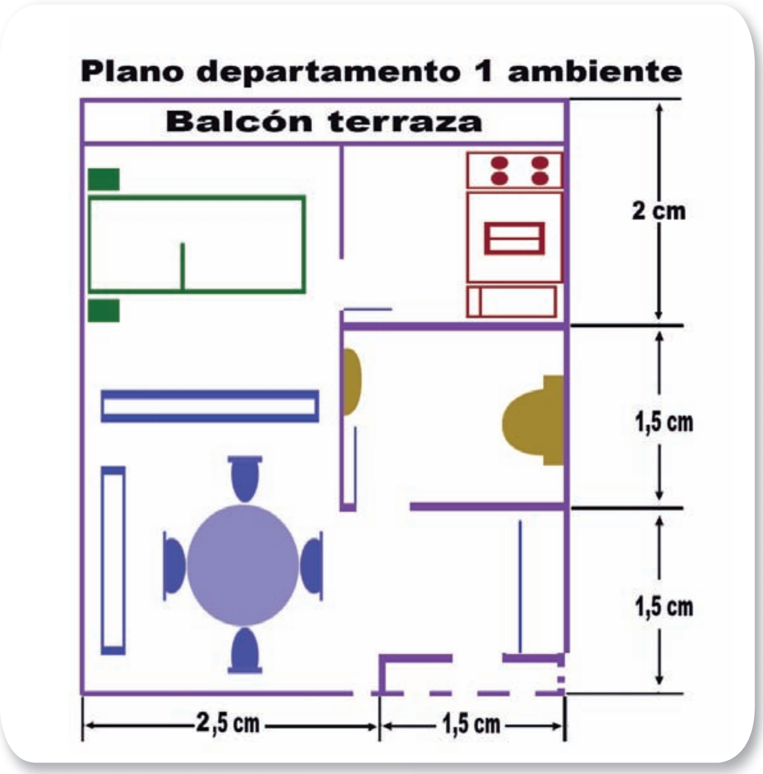
¿Cuáles serán las nuevas medidas de la bodega en el plano?

2) Una fotocopiadora reduce en un 30% el tamaño original de un documento.

¿Cuál es la escala de reducción?

3) El plano del departamento está hecho con una escala 1:100.

¿Cuáles son las medidas reales del departamento?



4) Dos tramos de la carretera 5 sur que están en reparación miden 7 km y 12 km respectivamente

¿Qué longitud deberían tener los tramos en un mapa a escala 1:1.000?

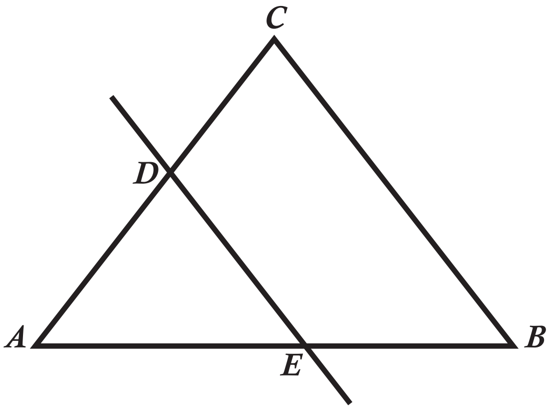
5) El perímetro de un terreno rectangular de 8 hectáreas tiene una longitud de 2 km.

¿cuál es el área del terreno en un mapa a escala 1:20.000 ?

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SEMEJANZA ENTRE TRIÁNGULOS

Este Teorema se conoce como: **"Teorema particular de Thales"**
Establece las proporciones de los segmentos correspondientes en triángulos.
Si en un ángulo cualquiera sus lados son cortados por dos o más paralelas, entonces dos segmentos correspondientes cualquiera determinados por las paralelas sobre los lados del ángulo son proporcionales entre sí.

Sea: $\triangle ABC$ y $\overline{CB} // \overline{DE}$

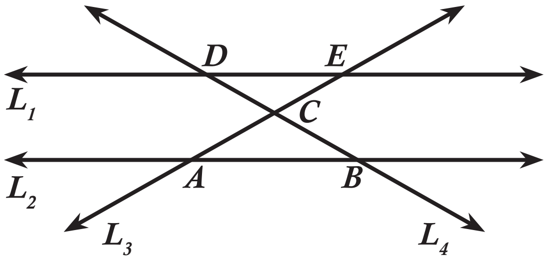


TIPS
Los triángulos ABC y AED son semejantes y se escribe así:
$\Delta ABC \sim \Delta AED$
Esto quiere decir que un triángulo es la copia exacta del otro, pero de distinto tamaño.
Sus ángulos son congruentes y sus lados son proporcionales.

Con procedimientos algebraicos y geométricos es posible determinar las siguientes proporciones:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} \text{ y } \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}}$$

TIPS
Las proporciones determinadas en triángulos en los que un ángulo es cortado por una paralela a uno de los lados se pueden extender a paralelas cortadas por dos secantes, como lo muestra la figura 1:

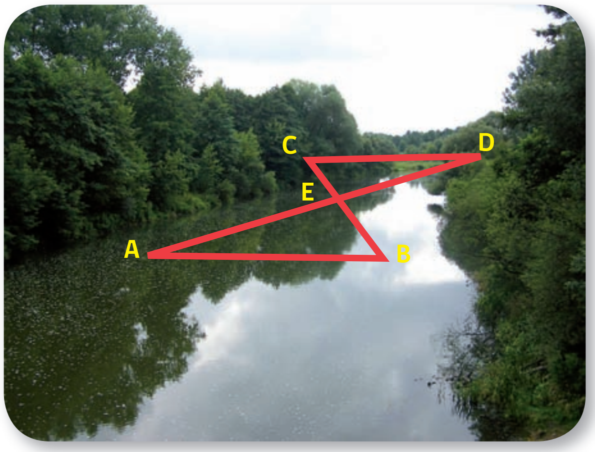


$L_1 // L_2$, L_3 y L_4 secantes
Con procedimientos algebraicos y geométricos es posible obtener la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

Ejemplo de una aplicación:

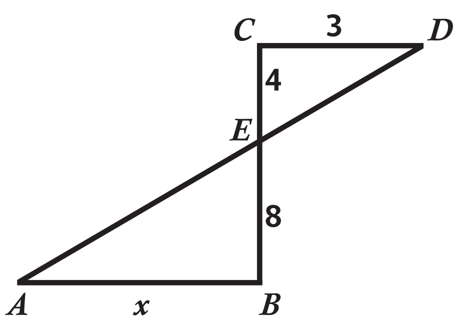
Se desea determinar el ancho de un canal para armar un puente y poder cruzarlo. ¿ Cómo resolver este problema utilizando la semejanza de triángulos?



Solución:

Para poder determinar el ancho del canal, podemos utilizar las proporciones que determinamos con el teorema fundamental de la semejanza:

- Fijamos un punto referencial A, al otro lado del canal.
- En el punto B clavamos una estaca que será desde donde construiremos una figura que nos permita determinar el ancho del canal.
- Desde el punto B caminamos 8 pasos en línea recta a la orilla del canal y determinamos el punto E. por lo cual $\overline{BE}$ = 8 pasos.
- $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{BE}$.
- Desde el punto E caminar 4 pasos más en línea recta y determinamos el punto C. Por lo cual $\overline{EC}$ = 4 pasos.
- Desde el punto C. caminar 3 pasos más en línea perpendicular al lado $\overline{BC}$ y determinamos el punto D. Por lo cual CD = 3 pasos. Se formó el triángulo rectángulo ECD.
- Uniendo los puntos A, B y E se forma un triángulo rectángulo en B.
- El esquema geométrico de lo que dibujamos quedaría de esta manera:



TIPS

Los triángulos ABE y DCE son semejantes y se escribe así:

$$\Delta ABE \sim \Delta DCE$$

1) $\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle DCE$ miden 90°

2) $\sphericalangle AEB \cong \sphericalangle DEC$ Opuestos por el vértice.

3) Las proporciones son:

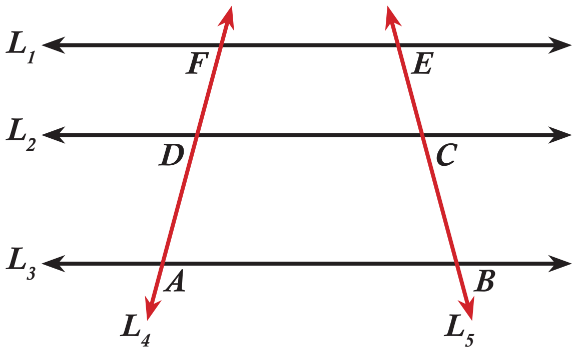
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{8}{4} \rightarrow x = 6 \text{ pasos}$$

Si cada paso es de aproximadamente 1 metro, el ancho del canal es de 6 metros aproximadamente.

TEOREMA GENERAL DE THALES

Si tres o más rectas paralelas intersectan a dos o más rectas cualesquiera, determinan sobre éstas segmentos proporcionales entre sí:

$AB // CD // EF$



Con procedimientos algebraicos y geométricos es posible determinar las siguientes proporciones:

1) $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$

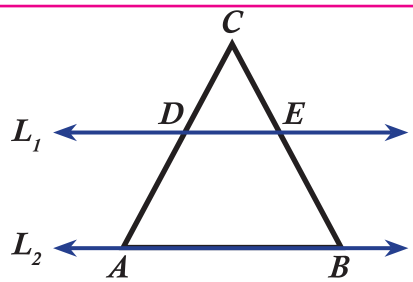
2) $\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$

3) $\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$

TIPS

Lo que hemos tratado, se puede resumir en el siguiente cuadro:

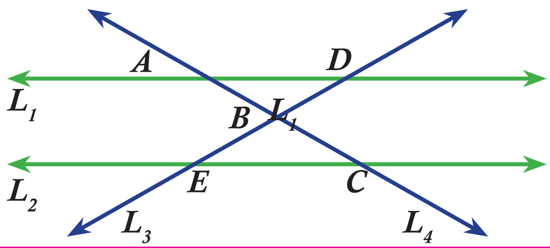
a) En un triángulo cualquiera si tenemos una recta paralela a uno de los lados:



$\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{AB}$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$

b) Dos rectas paralelas que intersectan a dos rectas secantes que se intersectan entre las rectas:

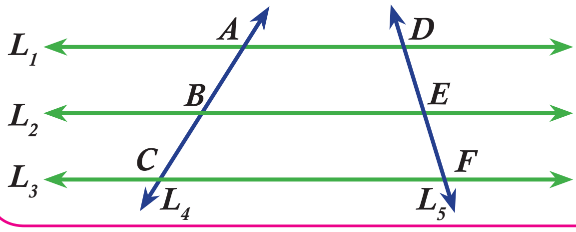


$L_1 // L_2$, L_3 y L_4 secantes

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CE}}$

c) Tres o más rectas paralelas que son cortadas por dos o más rectas secantes cualesquiera:

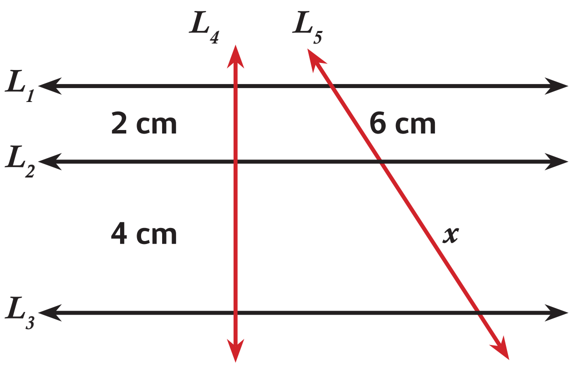
$\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{CF}$



$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$

Ejemplos:

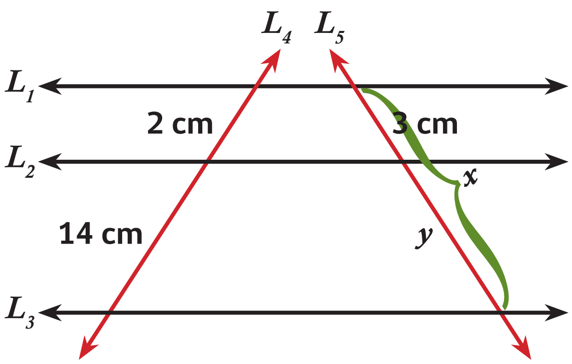
Si $L_1 // L_2 // L_3$. Determine en cada caso la medida del segmento x.



Solución:

Aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{x} \rightarrow 2x = 4 \cdot 6 \rightarrow x = \frac{24}{2} = 12$$



Solución:

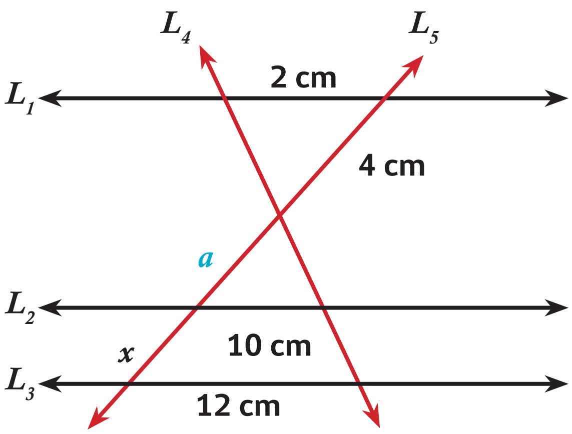
Aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{2}{14} = \frac{3}{y} \rightarrow 2y = 14 \cdot 3 \rightarrow y = \frac{42}{2} = 21$$

$$y = 21 \text{ cm}$$

Luego $x = 3 + y = 3 + 21 = 24$

$$x = 24 \text{ cm}$$



Solución:

Aplicando el teorema de Thales:

$$\frac{2}{10} = \frac{4}{a} \rightarrow 2a = 10 \cdot 4 \rightarrow a = \frac{40}{2} = 20$$

$$a = 20 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{12} = \frac{4}{20 + x} \rightarrow 40 + 2x = 12 \cdot 4$$

$$x = \frac{12 \cdot 4 - 40}{2} = 4$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

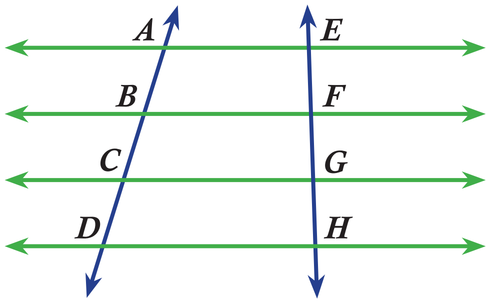
Actividad en el cuaderno

1) En la figura $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{DH}$. Determine x en cada caso:

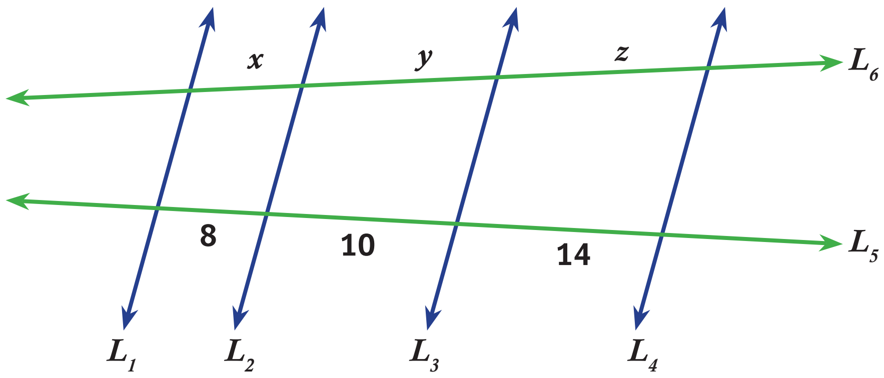
a) $\overline{AB}$ = 4 cm; $\overline{CD}$ = 8 cm; $\overline{HG}$ = 9 cm; $\overline{EF}$ = x cm

b) $\overline{FG}$ = 7 cm; $\overline{DC}$ = 14 cm; $\overline{GH}$ = 18 cm; $\overline{CB}$ = x cm

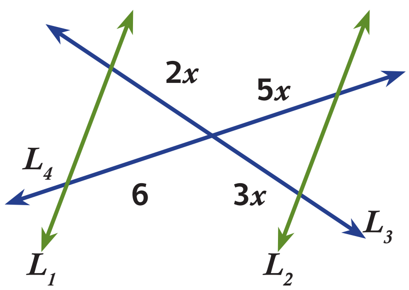
c) $\overline{EF}$ = 9 cm; $\overline{DC}$ = 24 cm; $\overline{AB}$ = 25 cm; $\overline{HG}$ = x cm

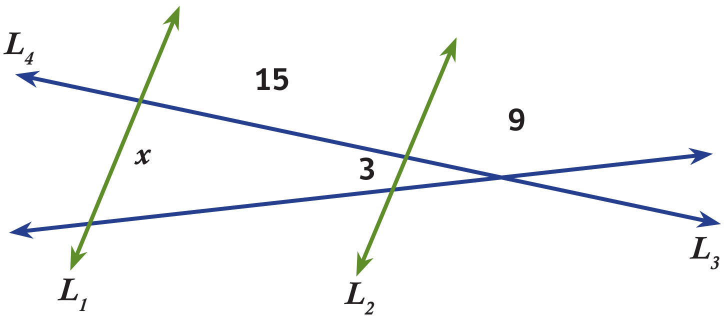


2) Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ Calcule x, y, z Si: $x + y + z$ = 70 cm



3) Determine el valor de x en cada caso para que L_1 y L_2 sean paralelas:





EVALUACIÓN

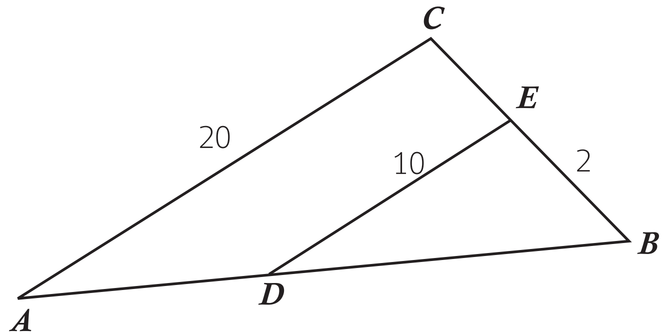
Resuelva cada situación y marque con una X la alternativa correcta:

1) En un mapa (a escala) se tiene que 1 cm en él corresponde a 25 km en la realidad. Si la distancia en el mapa entre dos ciudades es 10,8 cm, entonces la distancia real es:

a) 100 km
b) 135 km
c) 270 km
d) 300 km

2) En la figura $AC \parallel DE$ la medida de BC es:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4



3) Observe estas tres fotografías e identifique cuales son semejantes:

I) 8 cm, 5 cm

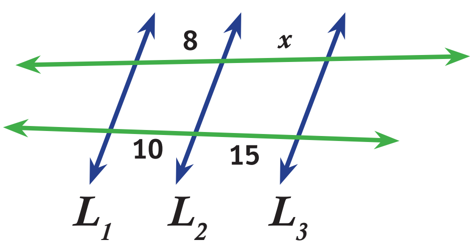
II) 12 cm, 7,5 cm

III) 13 cm, 9 cm

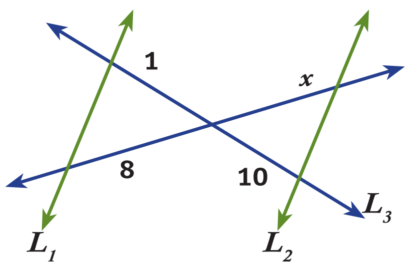
a) **I** y **II** **b)** **I** y **III** **c)** **I**, **II** y **III** **d)** **II** y **III**

4) ¿En cuál(es) de las siguientes figuras el valor de x es 12?

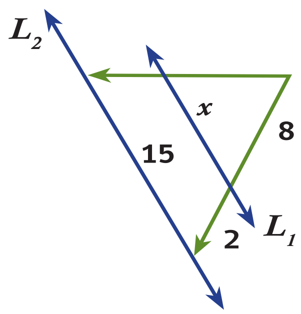
I) $L_1 // L_2 // L_3$



II) $L_1 // L_2$



III) $L_1 // L_2$



a) **I** y **II** **b)** **I** y **III** **c)** **I**, **II** y **III** **d)** **II** y **III**

Guía de trabajo Nº 2

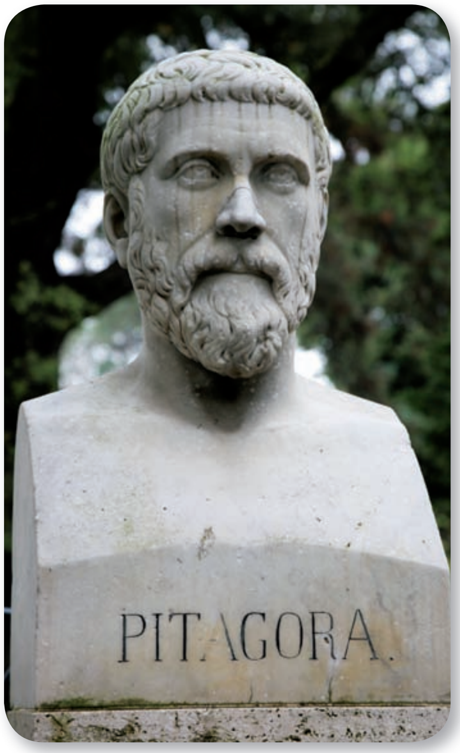
Los primeros pasos en la trigonometría

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

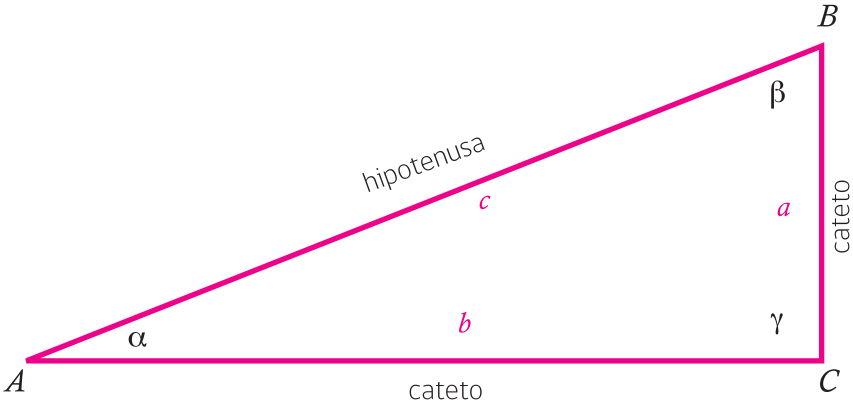
Contenidos

- Determinación de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en el triángulo rectángulo.
- Resolución de problemas que involucran el uso de la trigonometría como el cálculo de alturas y distancias inaccesibles.
- Teorema de Pitágoras.
- Medidas de ángulos en sistema sexagesimal y en radianes.
- Conversión de unidades de medida de ángulos.
- Funciones trigonométricas cuadrantes en el plano cartesiano.
- Identidades pitagóricas.

La trigonometría es una herramienta útil para calcular alturas y distancias inaccesibles o de difícil acceso; se aplica en diversas áreas, como por ejemplo en la topografía, en la navegación y en la astronomía.



En todo triángulo ABC, rectángulo en C, se cumple el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$



TIPS

- En un triángulo, la suma de sus ángulos interiores es 180º.
- Un **triángulo rectángulo** tiene unos de sus ángulo recto (mide 90º).
- En un **triángulo rectángulo,** los ángulos que no son rectos, son ángulos agudos (su medida es mayor que 0º y menor que 90º)

Recuerde que una razón es la *comparación* por *cociente* entre dos cantidades. En una razón, el numerador se llama antecedente y el denominador se llama consecuente.
La razón entre a y b se anota:

$\frac{a}{b}$ o $a : b$

Por ejemplo: $\frac{14}{3}$ o $14 : 3$

En una razón escrita como fracción:
El numerador, recibe el nombre de antecedente

$$\frac{a}{b}$$

El denominador recibe el nombre de consecuente

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En un triángulo rectángulo, se llaman razones trigonométricas a aquellas que se establecen entre las medidas de sus lados. Cada razón trigonométrica se relaciona con algunos de los ángulos agudos del triángulo rectángulo. Las razones trigonométricas asociadas a un ángulo α son 6, se denominan: **coseno de α, seno de α, tangente de α, secante de α, cosecante de α y cotangente de α,** y se abrevian: *cos* α, *sen* α, *tan* α, *sec* α, *csc* α, *cot* α, respectivamente. Las definiciones son las siguientes:

Coseno de α:

El coseno del ángulo α se define como la **razón entre el cateto adyacente al ángulo α y la hipotenusa:**

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente\ A\ \alpha}{hipotenusa}$$

Seno de α:

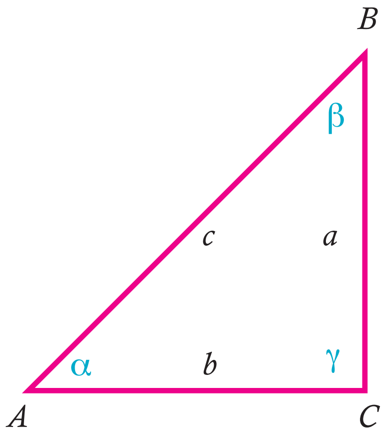
El seno del ángulo α se define como la razón **entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa**

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ A\ \alpha}{hipotenusa}$$

Tangente de α :

La tangente del ángulo α se define como la **razón entre el cateto opuesto al ángulo α y el cateto adyacente a α**

$$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto\ A\ \alpha}{cateto\ adyacente\ A\ \alpha}$$

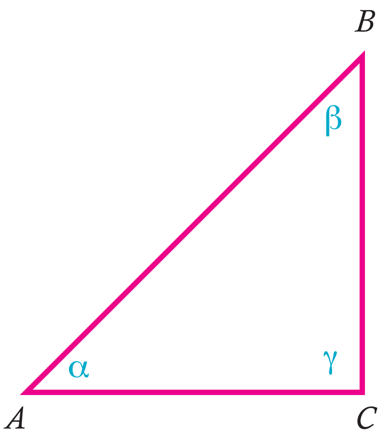


$$sen\ \alpha = \frac{a}{c}$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c}$$

$$tan\ \alpha = \frac{a}{b}$$

ACTIVIDAD **Determine las razones trigonométricas:**



$cos\ \alpha =$

$sen\ \alpha =$

$tan\ \alpha =$

ACTIVIDAD Lea y observe atentamente la información y aplíquela:

Secante de α:

La secante del ángulo α se define como **la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo α.**

$$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente\ A\ \alpha}$$

Cosecante de α:

La cosecante del ángulo α se define como **la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo α.**

$$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto\ A\ \alpha}$$

Cotangente α :

La cotangente del ángulo α se define como **la razón entre el cateto adyacente al ángulo α y el cateto opuesto a α .**

$$cot\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente\ A\ \alpha}{cateto\ opuesto\ A\ \alpha}$$

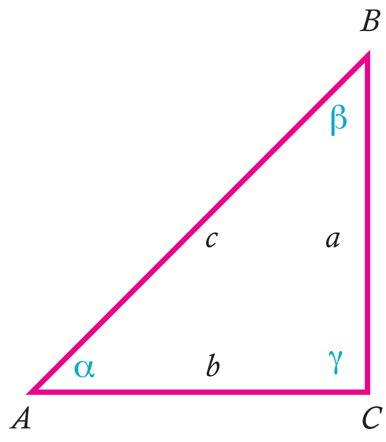
TIPS

Identidades trigonométricas inversas:

$$csc\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha},$$

$$sec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha},$$

$$cot\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha}$$

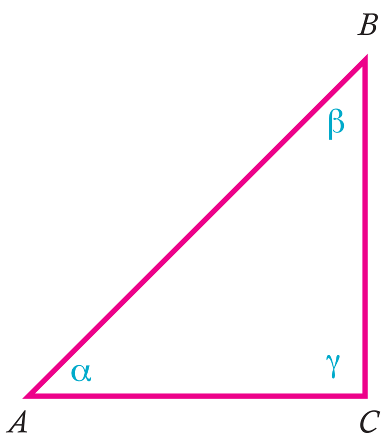


$$csc\ \alpha = \frac{c}{b}$$

$$sec\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$cot\ \alpha = \frac{b}{a}$$

ACTIVIDAD Determine las razones trigonométricas:



$sec\ \alpha =$ ☐

$csc\ \alpha =$ ☐

$cot\ \alpha =$ ☐

TRABAJANDO CON LOS ÁNGULOS AGUDOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

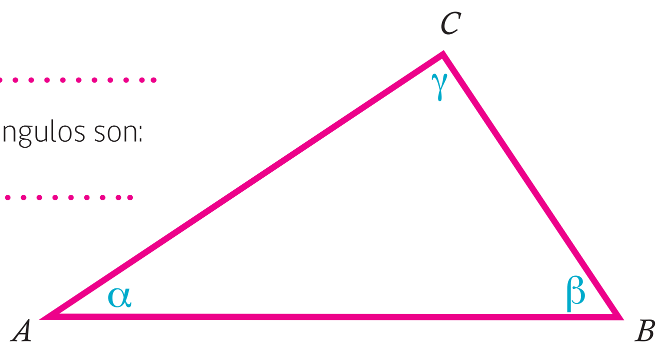
Todo triángulo rectángulo posee dos ángulos agudos.

ACTIVIDAD **Complete lo que falta en la oración:**

Todo triángulo rectángulo posee un ángulo ....

y dos ángulos ...., ... en este caso los ángulos son:

.... y ...., el ángulo recto es: ....

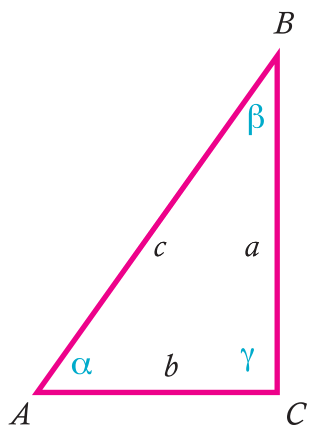


Relación entre el seno y la cosecante del ángulo agudo α del triángulo rectángulo.

Seno:
El seno del ángulo α es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo α y la hipotenusa:**

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c}$$



Cosecante:
La cosecante del ángulo α es la **razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo α:**

$$csc\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

$$csc\ \alpha = \frac{c}{a}$$

¿Qué diferencias y que semejanzas observa entre la *tan* α y la *cot* α? ....

....

Actividad en el cuaderno

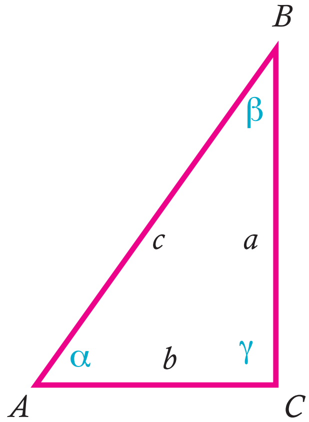
Dibuje un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados son: 12 cm - 5 cm - 13 cm y determine las razones trigonométricas del seno y la cosecante de los ángulos agudos.

Observe atentamente cada razón trigonométrica y complete lo pedido en cada caso:
Relación entre el coseno y la secante del ángulo agudo α del triángulo rectángulo.

Coseno:
El coseno del ángulo α es la **razón entre el cateto adyacente al ángulo α y la hipotenusa:**

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



Secante:
La secante del ángulo α es la **razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo α:**

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

¿Qué diferencias y qué semejanzas observa entre el $\cos \alpha$ **y la** $\sec \alpha$**?**

....

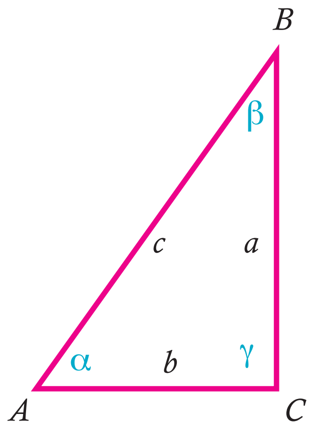
....

Relación entre la tangente y la cotangente del ángulo agudo α del triángulo rectángulo.

Tangente:
La tangente del ángulo α es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo α y el cateto adyacente:**

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$



Cotangente:
La cotangente del ángulo α es la **razón entre el cateto adyacente al ángulo α y el cateto opuesto a este:**

$$\cot \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

¿Qué diferencias y qué semejanzas observa entre la $\tan \alpha$ **y la** $\cot \alpha$**?**

....

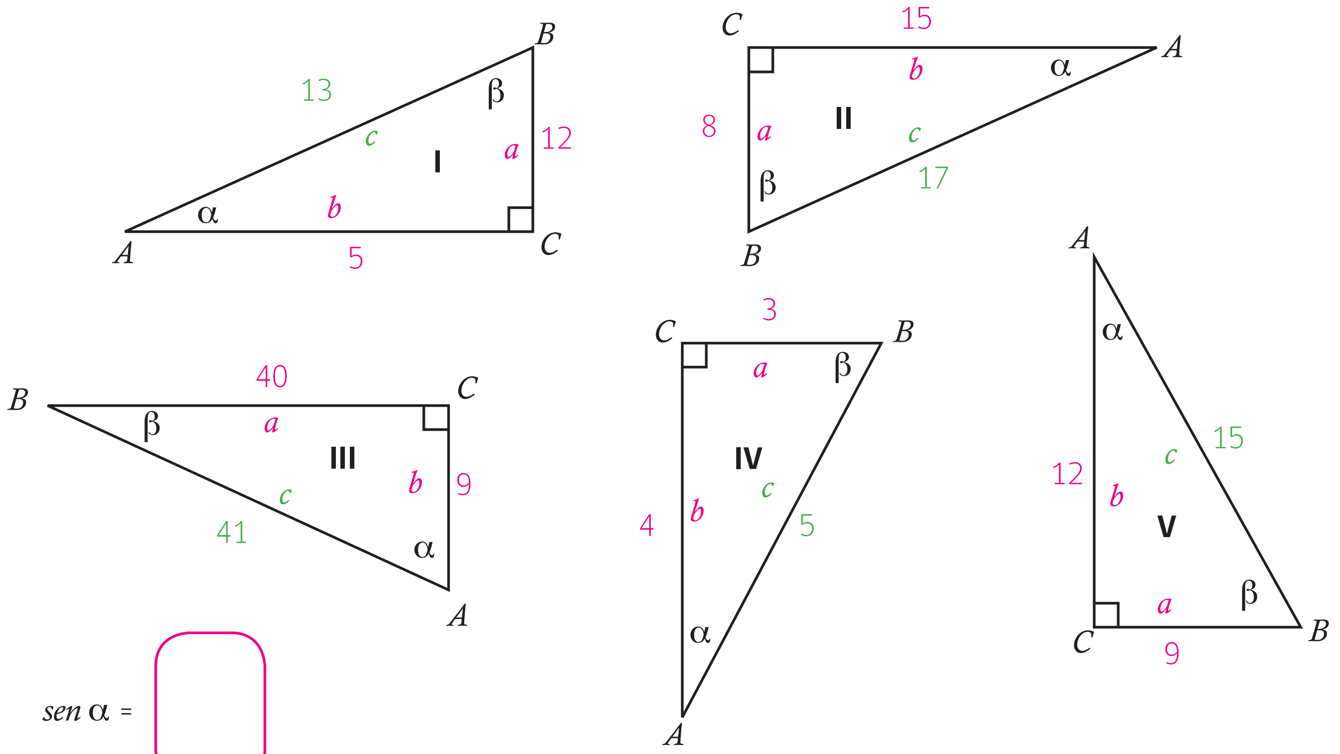
....

Actividad en el cuaderno

Dibuje un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados son: 6 cm - 8 cm - 10 cm y determine las razones trigonométricas del seno y cosecante y de la tangente y cotangente de los ángulos agudos.

ACTIVIDAD

Dados los triángulos rectángulos, escriba las razones trigonométricas de: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α del triángulo I y compare sus resultados con sus compañeros:



sen α =

cos α =

tan α =

csc α =

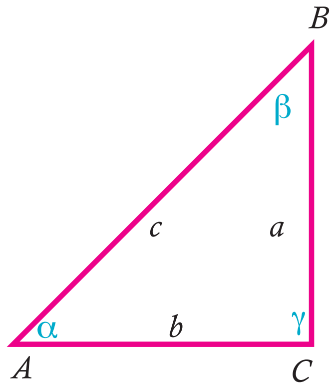
sec α =

ctg α =

Actividad en el cuaderno

Determine las razones trigonométricas de los triángulos II, III, IV y V

ACTIVIDAD **Observe atentamente el triángulo y la información dada y complete más abajo lo pedido:**



$$sen\ \beta = \frac{b}{c}$$

$$cos\ \beta = \frac{a}{c}$$

$$tan\ \beta = \frac{b}{a}$$

Responda lo pedido y determine las razones del ángulo β:

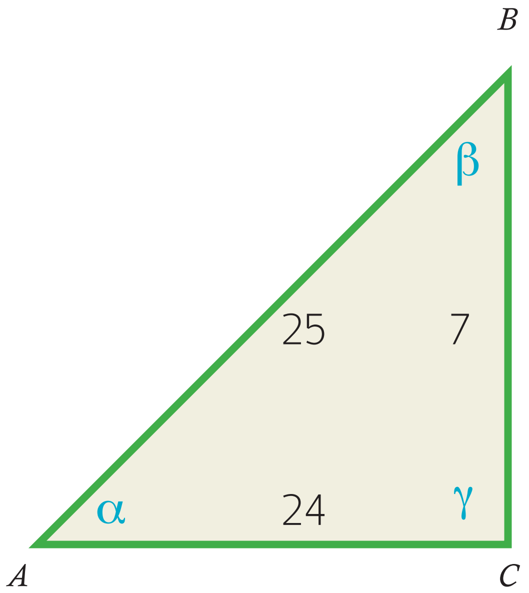
a) Seno:

El seno del ángulo β se define como la razón entre:

. . . .

. . . .

$sen\ \beta =$ ____________



b) Coseno:

El coseno del ángulo β: se define como la razón entre:

. . . .

. . . .

$cos\ \beta =$ ____________

c) Tangente:

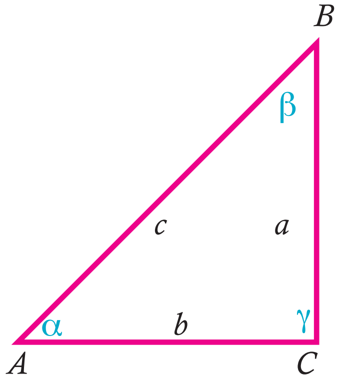
La tangente del ángulo β se define como razón entre:

. . . .

. . . .

$tan\ \beta =$ ____________

ACTIVIDAD **Observe atentamente el triángulo y la información dada y complete más abajo lo pedido:**



$csc\,\beta = \dfrac{c}{b}$

$sec\,\beta = \dfrac{c}{a}$

$cot\,\beta = \dfrac{a}{b}$

Responda lo pedido y determine las razones del ángulo β:

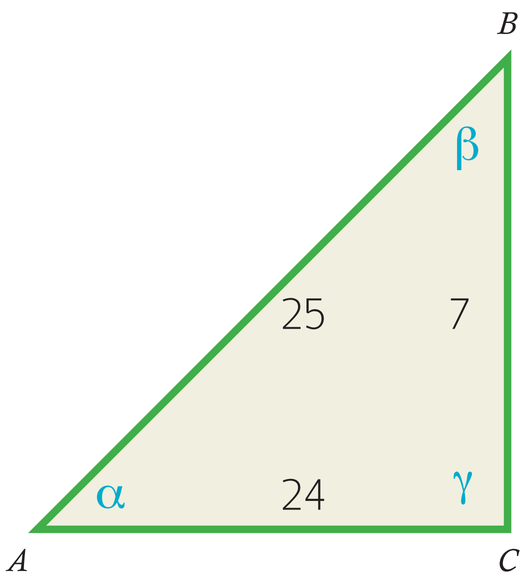
a) Cosecante:

La cosecante del ángulo β se define como la razón entre:

....

....

$csc\,\beta =$ ________________



b) Secante:

La secante del ángulo β: se define como la razón entre:

....

....

$sec\,\beta =$ ________________

c) Cotangente:

La cotangente del ángulo β se define como razón entre:

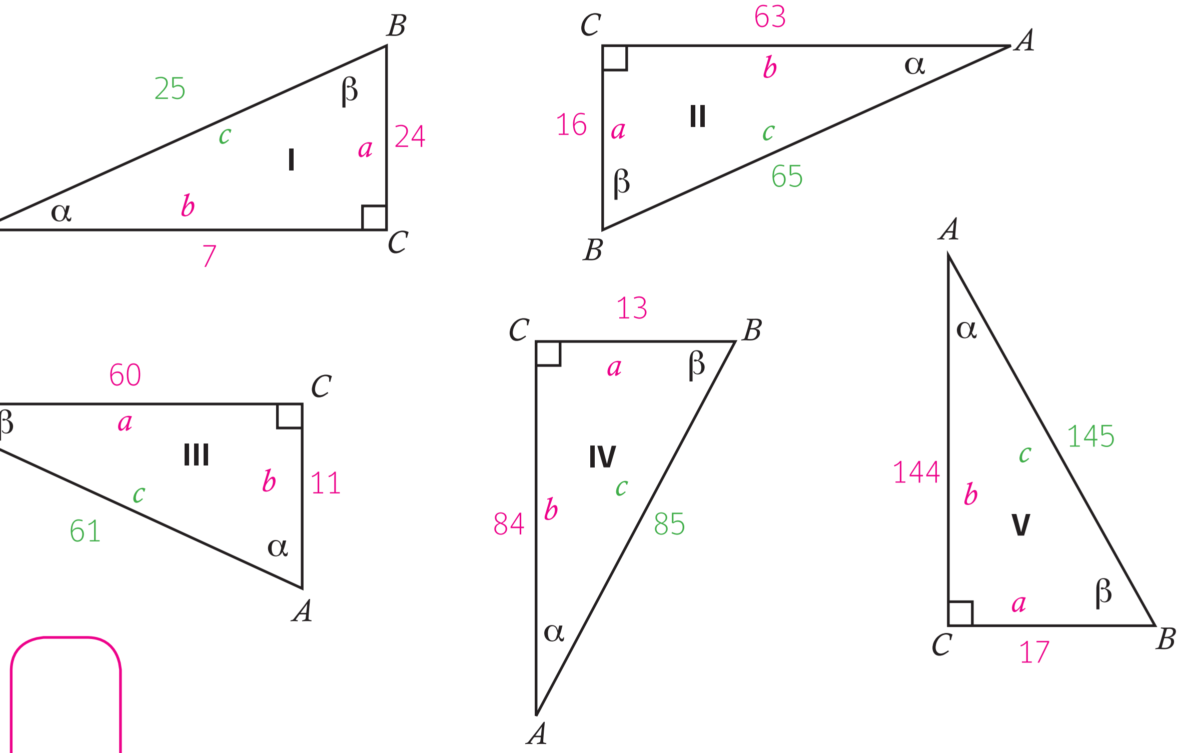
....

....

$cot\,\beta =$ ________________

ACTIVIDAD

Dados los triángulos rectángulos, escriba las razones trigonométricas de: seno, coseno , tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo β del triángulo I y compare sus resultados con sus compañeros:



sen β =

cos β =

tan β =

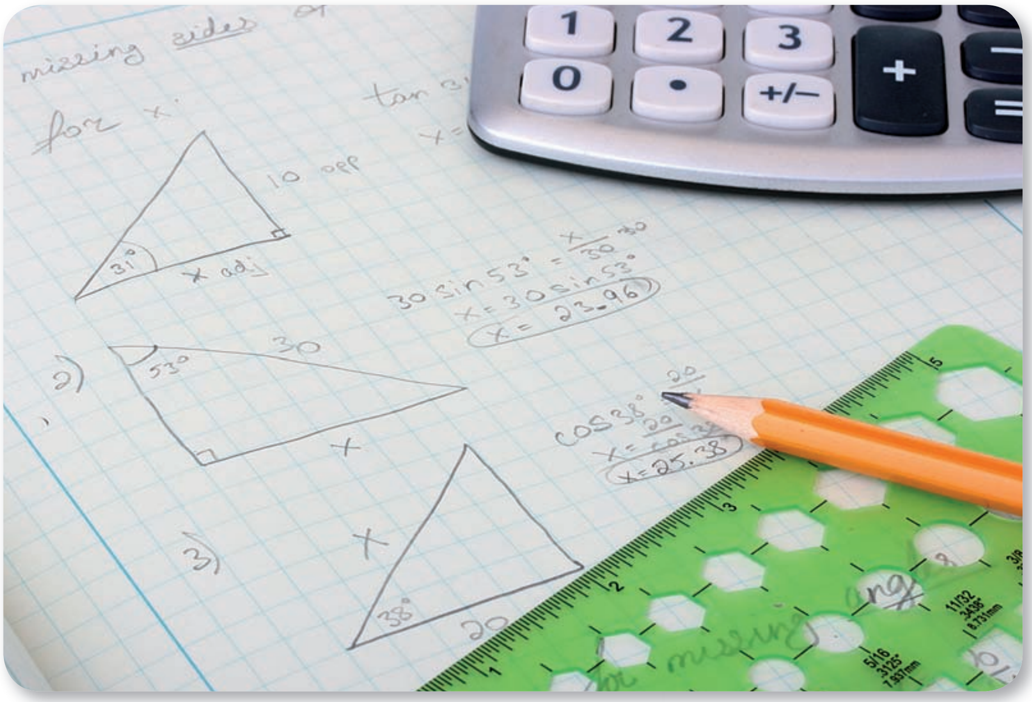
csc β =

sec β =

ctg β =

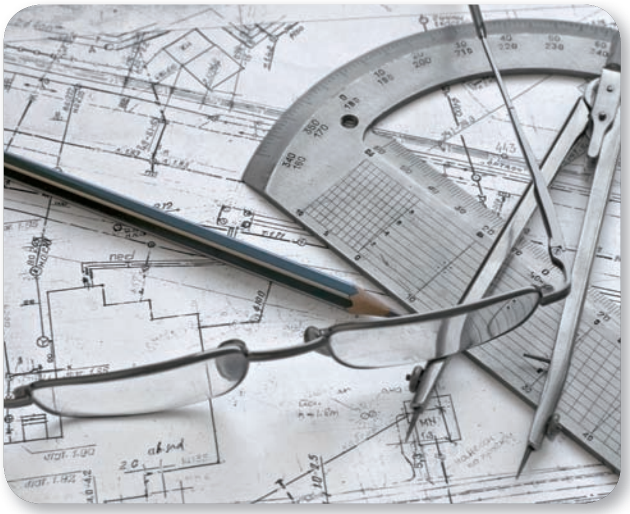
Actividad en el cuaderno

Determine las razones trigonométricas de los triángulos II, III, IV y V



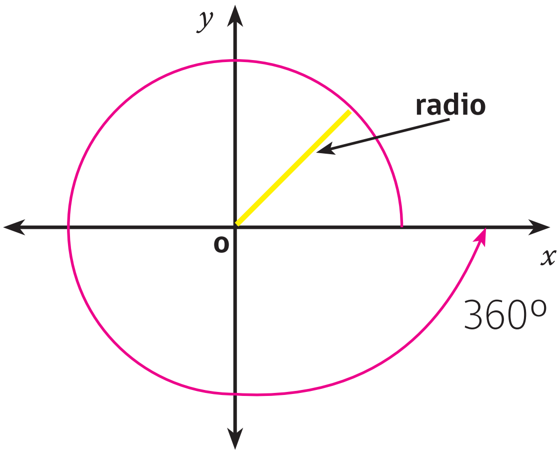
MEDIDAS DE ÁNGULOS

Describiremos sistemas para medir ángulos. Usualmente se utilizan dos unidades de medida: los grados **sexagesimales** y los **radianes.**

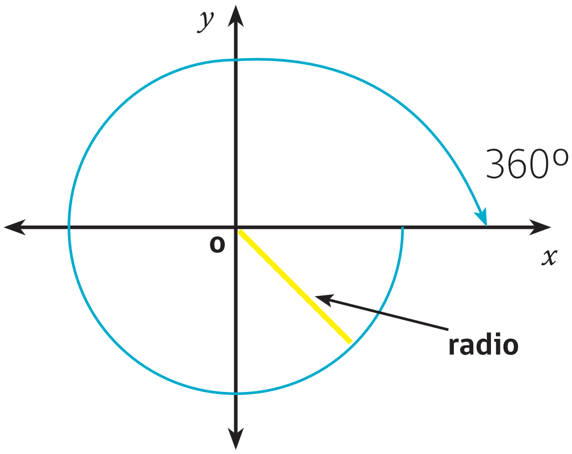


Desde la trigonometría: El ángulo es la amplitud de rotación de un segmento de recta llamado radio en torno a un punto llamado centro, y se considera positivo. La rotación en sentido antihorario y su medida toma valores positivos. Si el ángulo se mide en sentido horario, su medida toma valores negativos.

Ángulo positivo (+)



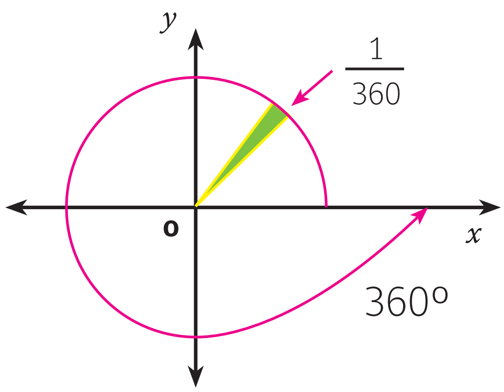
Ángulo negativo (–)



TIPS

Grados sexagimales:

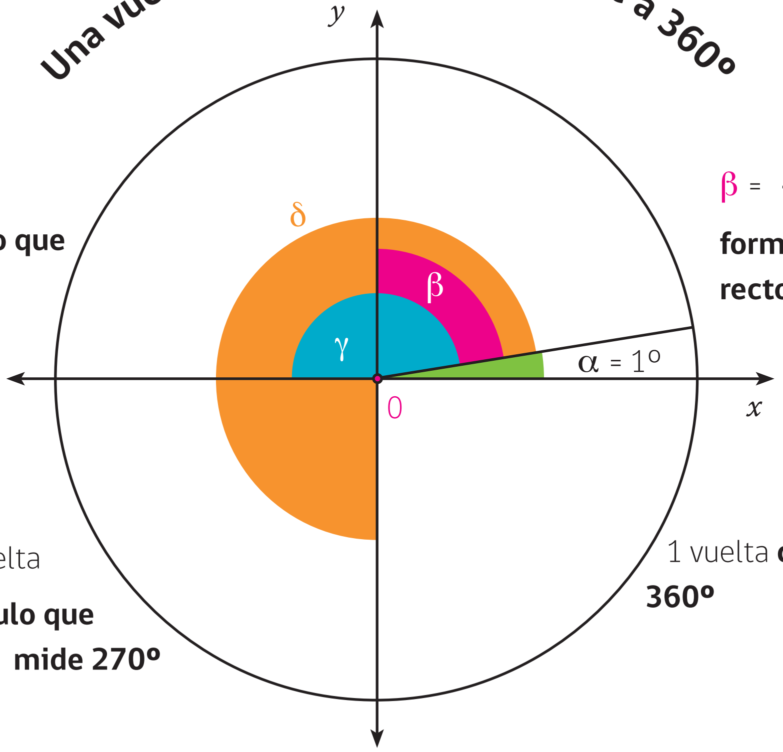
Un grado sexagesimal (1°) es la medida del ángulo del centro que subtiende un arco igual a una trescientos sesenta - ava $\left(\frac{1}{360}\right)$ parte de la circunferencia. Si la medida de un ángulo es α grados, lo detonaremos, α°



Una vuelta completa es equivalente a 360º

$\gamma = \frac{1}{2}$ vuelta
forma un ángulo extendido o llano que mide 180º

$\beta = \frac{1}{4}$ vuelta
forma un ángulo recto que mide 90º



$\delta = \frac{3}{4}$ vuelta
forma un ángulo que mide 270º

1 vuelta **completa mide 360º**

- Si 1° (un grado) se divide en 60 ángulos iguales, la medida de cada nuevo ángulo, por convención, es un minuto y se anota **1'**. Si un ángulo mide α minutos, se denota α'. Ejemplos: **10'**: 10 minutos; **25'**: 25 minutos; **58'**: 58 minutos.
- Si **1'** (un minuto) se divide en 60 ángulos iguales, cada uno de éstos mide, por convención, **un segundo,** lo que se anota **1''**. Alfa segundos se anotan α''. Ejemplos: **10''**: 10 segundos; **43''**: 43 segundos; **54''**: 54 segundos

Ejemplo:	**Se lee:**
El ángulo: α = 15º 30' 45''	La medida del ángulo alfa es: 15 grados, 30 minutos y cuarenta y cinco segundos.
El ángulo: α = 15,125º	La medida del ángulo alfa es: 15 grados con ciento veinticinco milésimas de grado.

ACTIVIDAD **Dados los ángulos con su respectiva medida, escriba la forma en que usted los leería:**

Medida del ángulo	Lectura de la medida
α = 75º 30' 55"	
β = 115º 30' 45"	
γ = 15º 30"	
δ = 15,54º	
ε = 315"	
θ = 7.200"	

MEDIDA DE ÁNGULOS USANDO RADIANES

Otra unidad de medida de ángulos, muy difundida en trígonometría, es el **radián**, **un radián** (1[rad].) es la medida de un ángulo del centro de circunferencia que subtiende un arco de longitud igual a la del radio.

- Figura 1: el ángulo β mide 1 [rad].
- Figura 2: el ángulo β mide 2 [rad].
- Figura 3: el ángulo β mide 3 [rad].
- Figura 4: el ángulo β = 360º mide 2π [rad].

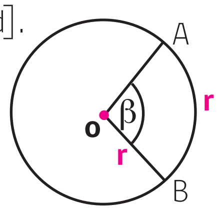


fig. 1

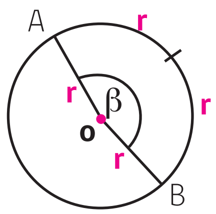


fig. 2

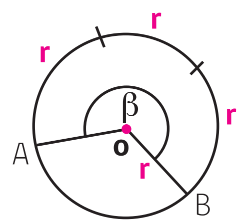


fig. 3

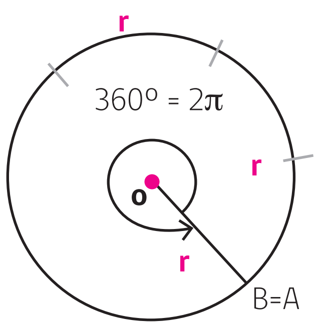


fig. 4

Obsérvese que en el caso de la figura 4, un ángulo de 360º subtiende un arco de circunferencia completo de medida $2\pi r$ unidades, al dividir esta longitud por la medida r del radio, se obtiene 2π, es decir 360º $\leftrightarrow$ 2π [rad]. Esta equivalencia permite establecer que 180º $\leftrightarrow \pi$ [rad]

TRANSFORMAR UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

La equivalencia $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ [rad], permite establecer esta otra equivalencia aun más sencilla **180º** $\leftrightarrow \pi$ [rad]. Para transformar ángulos sexagesimales a ángulos radianes y viceversa, se puede usar la siguiente proporción:

$$\frac{\text{medida en radianes de } \alpha}{\text{medida de grados de } \alpha} = \frac{\pi\,[\text{rad}]}{180^\circ}$$

Observe atentamente el desarrollo de las transformaciones de grados a radianes y viceversa:

a) Transformar 60º a [rad]: ($\alpha = 60^\circ$)

$$\frac{\text{medida en radianes de } \alpha}{60^\circ} = \frac{\pi\,[\text{rad}]}{180^\circ} \longrightarrow \text{medida en radianes de } \alpha = \frac{60^\circ\,\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

Por lo tanto $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$

b) Transformar $\dfrac{\pi}{9}$ [rad] a grados: $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{9}\ [\text{rad}]\right)$

$$\frac{\pi / 9}{\text{medida en grados de } \alpha} = \frac{\pi\,[\text{rad}]}{180^\circ} \longrightarrow \text{medida en grados de } \alpha = \frac{\frac{\pi}{9} \bullet 180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$$

Por lo tanto $\dfrac{\pi}{9} = 20^\circ$

ACTIVIDAD

Complete la siguiente tabla de equivalencias entre ángulos sexagesimales y ángulos radianes:

ÁNGULOS SEXAGESIMALES	ÁNGULOS RADIANES
30º	
	$\frac{\pi}{2}$ [rad]
60º	
	$\frac{\pi}{4}$ [rad]

ACTIVIDAD **Transforme los ángulos medidos en sistema sexagesimal a radianes:**

Medida del ángulo sistema sexagesimal	Medida del ángulo en radianes
$\alpha = 30^\circ$	
$\beta = 45^\circ$	
$\gamma = 60^\circ$	
$\delta = 210^\circ$	
$\varepsilon = 270^\circ$	
$\theta = 315^\circ$	

ACTIVIDAD **Transforme los ángulos medidos en radianes a sistema sexagesimal:**

Medida del ángulo sistema sexagesimal	Medida del ángulo en radianes
$\alpha = \frac{\pi}{8}$ [rad]	
$\gamma = \frac{\pi}{5}$ [rad]	
$\beta = \frac{\pi}{4}$ [rad]	
$\delta = \frac{3\pi}{5}$ [rad]	
$\varepsilon = \frac{3\pi}{4}$ [rad]	
$\eta = \frac{7\pi}{6}$ [rad]	
$\theta = \frac{7\pi}{4}$ [rad]	
$\varphi = \frac{9\pi}{4}$ [rad]	

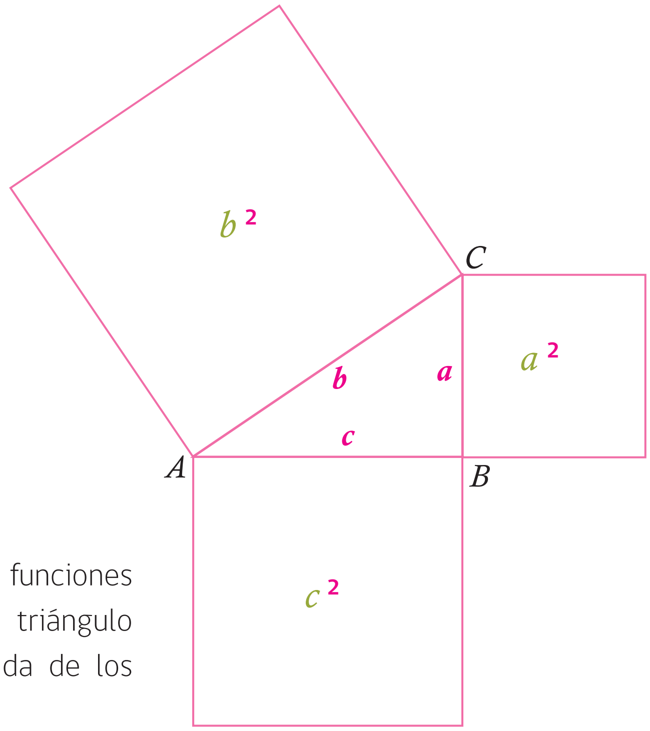
TRABAJAR CON LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El Teorema de Pitágoras puede ser utilizado para determinar la medida de alguno de los lados de un triángulo rectángulo y luego conocer el valor de las funciones trigonométricas asociadas a los ángulos agudos.

TIPS

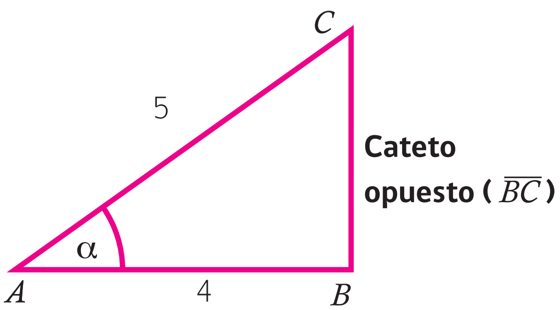
El teorema de Pitágoras plantea geométricamente que, en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Para determinar el valor de todas las funciones trigonométricas del ángulo agudo α, del triángulo rectángulo, es necesario conocer la medida de los catetos y de la hipotenusa.

Ejemplo 1: Determinar el valor de las seis funciones trigonométricas del ángulo α



Para determinar la medida del cateto opuesto, utilizamos el Teorema de Pitágoras:

$4^2 + \overline{BC}^{\,2} = 5^2$

$16 + \overline{BC}^{\,2} = 25$

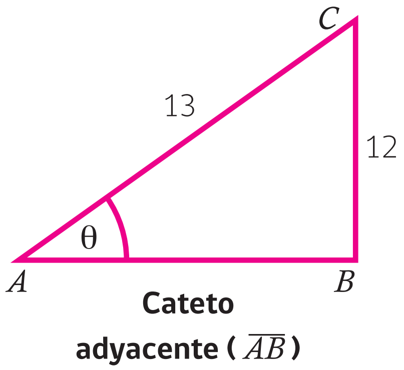
$\overline{BC}^{\,2} = 25 - 16 = 9 \qquad / \pm\sqrt{\ }$

$\overline{BC} = \sqrt{9} = 3$

Al determinar las razones trigonométricas del ángulo agudo θ, se obtiene:

$sen\ \alpha = \dfrac{3}{5} \qquad cos\ \alpha = \dfrac{4}{5} \qquad tan\ \alpha = \dfrac{3}{4} \qquad csc\ \alpha = \dfrac{5}{3} \qquad sec\ \alpha = \dfrac{5}{4} \qquad cot\ \alpha = \dfrac{4}{3}$

Ejemplo 2: Determinar el valor de las seis razones trigonométricas del ángulo θ



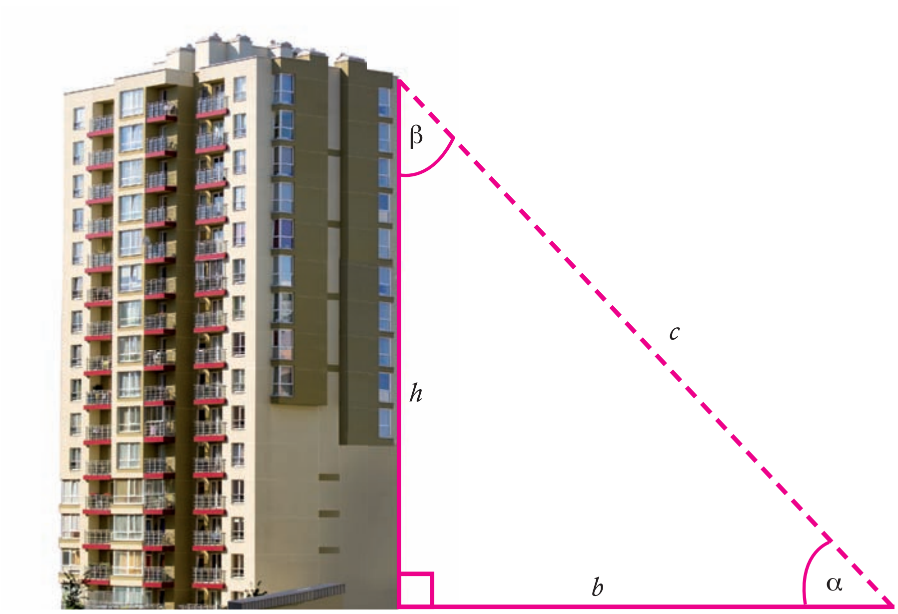
Para determinar la medida del cateto adyacente, utilizamos el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
12^2 + \overline{AB}^2 &= 13^2 \\
144 + \overline{AB}^2 &= 169 \\
\overline{AB}^2 &= 169 - 144 \\
\overline{AB}^2 &= 25 \qquad / \pm\sqrt{} \\
\overline{AB} &= 5
\end{aligned}$$

Al determinar las razones trigonométricas del ángulo agudo θ, se obtiene:

$$sen\,\theta = \frac{12}{13} \qquad cos\,\theta = \frac{5}{13} \qquad tan\,\theta = \frac{12}{5} \qquad csc\,\theta = \frac{13}{12} \qquad sec\,\theta = \frac{13}{5} \qquad cot\,\theta = \frac{5}{12}$$

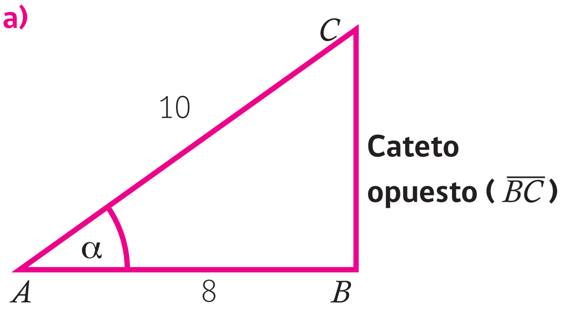
ACTIVIDAD **Identifica los ángulos agudos en la figura y escribe una expresión para determinar las razones trigonométricas de: seno, coseno y tangente.**



ACTIVIDAD Ejercicios y aplicaciones

Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo α y β señalado en cada triángulo.

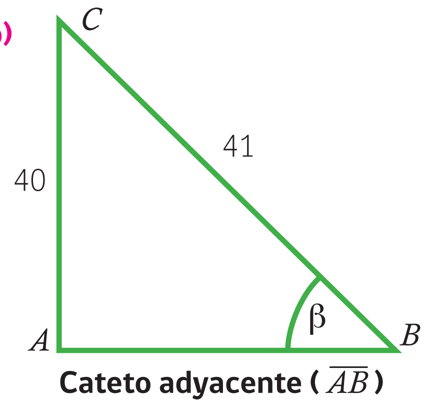
a)



Aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar el valor del cateto opuesto.

$sen\ \alpha$ = $cos\ \alpha$ = $tan\ \alpha$ = $csc\ \alpha$ = $sec\ \alpha$ = $cot\ \alpha$ =

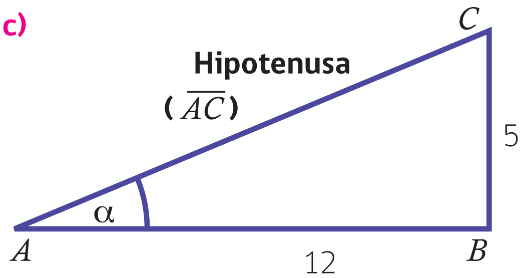
b)



Aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar el valor del cateto adyacente.

$sen\ \beta$ = $cos\ \beta$ = $tan\ \beta$ = $csc\ \beta$ = $sec\ \beta$ = $cot\ \beta$ =

c)

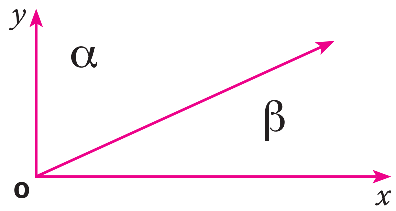


Aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar el valor de la hipotenusa.

$sen\ \alpha$ = $cos\ \alpha$ = $tan\ \alpha$ = $csc\ \alpha$ = $sec\ \alpha$ = $cot\ \alpha$ =

TIPS

Ángulos complementarios son los que sumados dan 90°

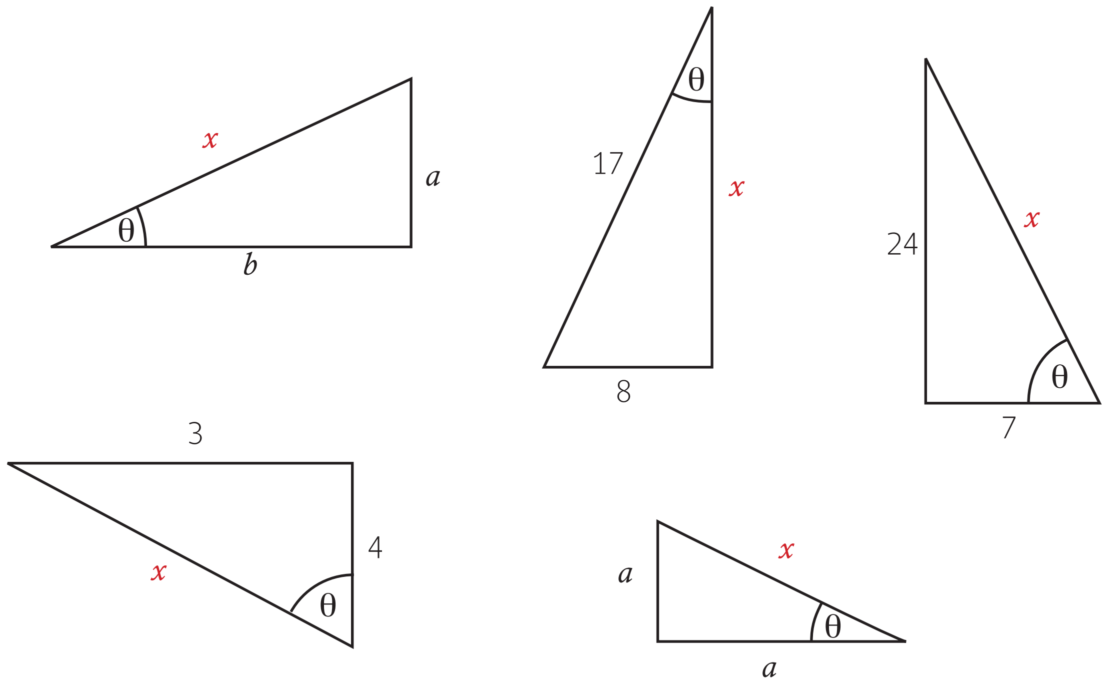


$\alpha + \beta = 90°$

Actividad en el cuaderno

Resuelva de acuerdo con las instrucciones de cada ítem:

1) Determine el valor del lado x de cada triángulo y luego los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo θ.



2) Utilizando calculadora, determine el valor de cada función trigonométrica hasta con tres cifras decimales y luego redondee hasta las décimas:

a) $sen\ 45° =$ **b)** $csc\ 45° =$ **c)** $cos\ 60° =$

a) $sec\ 60° =$ **b)** $tan\ 90° =$ **c)** $cot\ 0° =$

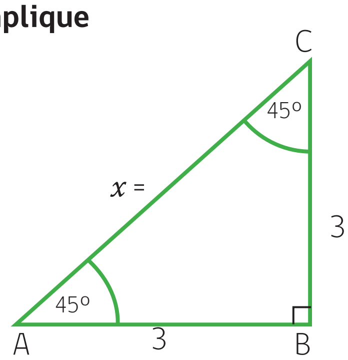
APLICANDO LO APRENDIDO

Hemos estudiado las razones trigonométricas sobre triángulos rectángulos y la medición de ángulos agudos de cualquier medida, estudiaremos los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de medidas: 30°; 45° y 60°

ACTIVIDAD

Determine el valor de las funciones trigonométricas de 45°
Siga cada una de las instrucciones y complete la información solicitada en cada paso:

a) Dado un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 3 unidades, **aplique** el Teorema de Pitágoras para **determinar la longitud de su hipotenusa:**



b) Con la medida determinada; **calcule las siguientes razones trigonométricas:**

sen 45° =

cos 45° =

tan 45° =

csc 45° =

sec 45° =

cot 45° =

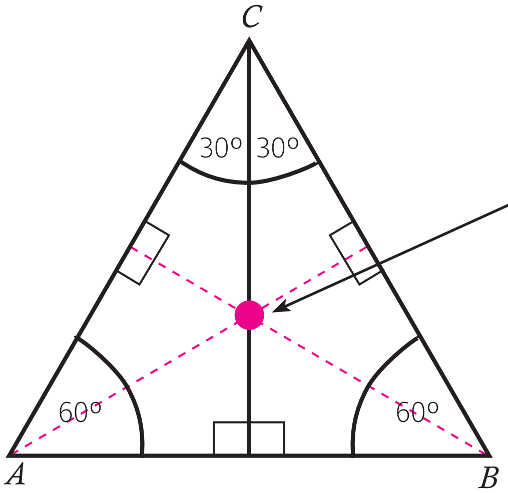
ACTIVIDAD Determinando el valor de las funciones trigonométricas de 60°

Y EN:

2) Determinaremos las razones de las funciones trigonométricas de los ángulos de 60° y 30°

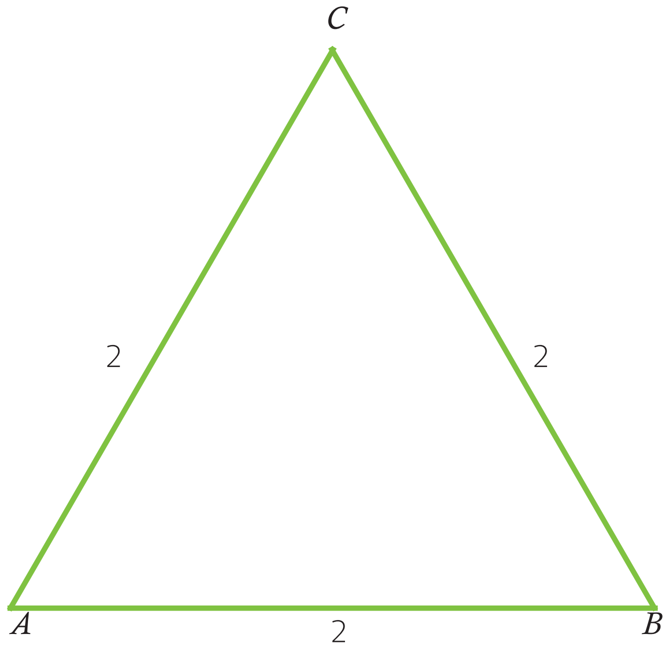
TIPS

Triángulo equilátero: Polígono de tres lados de igual medida y tres ángulos agudos congruentes, que miden 60º cada uno. **Altura de un triángulo:** Cada uno de los segmentos de recta perpendiculares, trazados desde un vértice del triángulo al lado opuesto de este.



El punto de intersección de las tres alturas se denomina **Ortocentro.**

a) Dado un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades cada uno: trazar las 3 alturas. (Utilizar una escuadra para trazar las alturas). Mida los ángulos con un transportador.



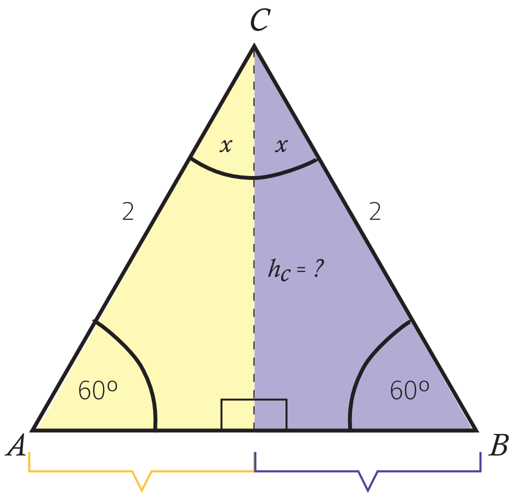
b) Complete cada frase considerando los datos y la incógnita en la figura.

La medida del ángulo x es: ....

El valor de $\frac{c}{2}$ es : ....

c) Utilice el Teorema de Pitágoras para determinar el valor de la altura: h_c = ...

d) Con las medidas determinadas calcule las siguientes funciones trigonométricas:



$\frac{c}{2}$ = $\boxed{}$ $\frac{c}{2}$ = $\boxed{}$

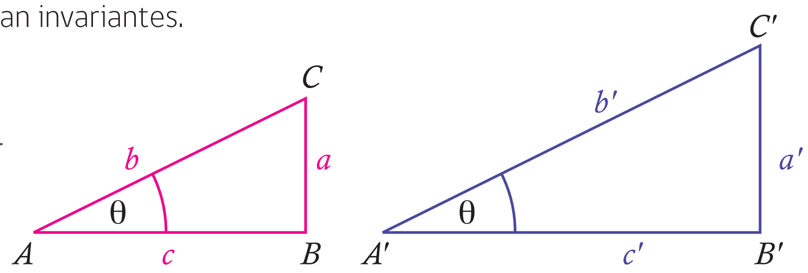
$sen\ 60º$ = $\boxed{}$	$cos\ 60º$ = $\boxed{}$	$tan\ 60º$ = $\boxed{}$
$csc\ 60º$ = $\boxed{}$	$sec\ 60º$ = $\boxed{}$	$cot\ 60º$ = $\boxed{}$
$sen\ 30º$ = $\boxed{}$	$cos\ 30º$ = $\boxed{}$	$tan\ 30º$ = $\boxed{}$
$csc\ 30º$ = $\boxed{}$	$sec\ 30º$ = $\boxed{}$	$cot\ 30º$ = $\boxed{}$

TIPS

LLas razones trigonométricas de un ángulo dado son invariantes, es decir, tienen siempre el mismo valor, no importa cuál sea el tamaño del triángulo rectángulo que contenga este ángulo. En la figura, los triángulos son semejantes. Por eso, la razón establecida entre dos lados de uno de ellos, tiene el mismo valor que la razón establecida entre los lados homólogos del otro. De ahí que, $sen\,\theta$; $cos\,\theta$ y tan . tengan el mismo valor para ambos triángulos y, en general, sean invariantes.

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$; $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$



ACTIVIDAD **Resuelva cada situación y complete, luego compare los resultados con sus compañeros y compañeras:**

1) Utilizando la transformación de ángulos y los cálculos desarrollados en las actividades anteriores, complete la tabla:

θ (radianes)	θ (grados)	$cos\ \theta$	$sen\ \theta$	$tan\ \theta$	$sec\ \theta$	$csc\ \theta$	$cot\ \theta$
$\frac{\pi}{6}$							
	45º						
$\frac{\pi}{3}$							

2) Utilizando la transformación de ángulos y los cálculos desarrollados en las actividades anteriores, complete la tabla:

θ (radianes)	θ (grados)	$cos\ \theta$	$sen\ \theta$	$tan\ \theta$	$sec\ \theta$	$csc\ \theta$	$cot\ \theta$
$\frac{\pi}{2}$							

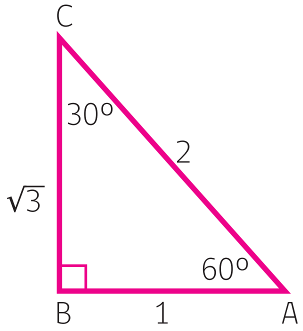
3) Observe las secuencias numéricas que se forman y complete la tabla con los valores numéricos que faltan:

Ángulo / Función	α = 0º	α = 30º	α = 45º	α = 60º	α = 90º
$sen\ \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\ }$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\ } = 1$
$cos\ \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\ }$	$\frac{1}{2}\sqrt{\ }$	$\frac{1}{2}\sqrt{\ } = 0$
$tan\ \alpha$	0				$\nexists$

TIPS

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

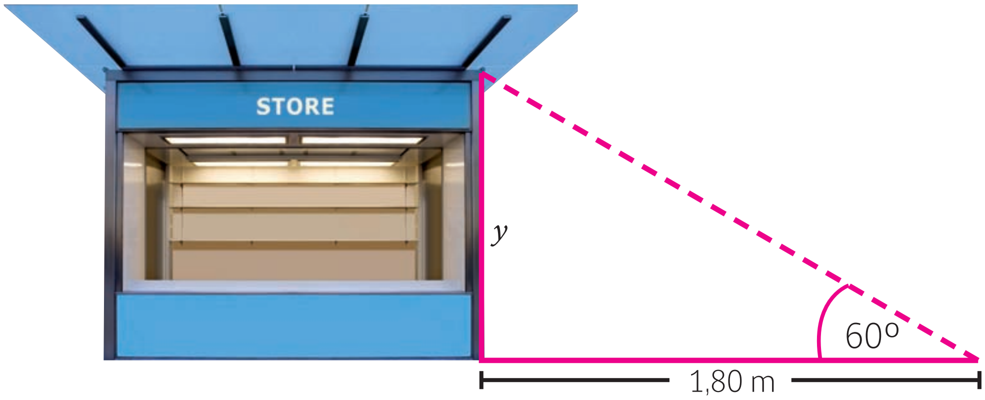
3) Dado el triángulo rectángulo en C, complete la tabla determinando el valor de la función trigonométrica:



cos 30º	*sen* $\frac{\pi}{2}$	*tan* 30º	*sec* 60º	*csc* 30º	*cot* 90º

Resolvamos situaciones utilizando los triángulos rectángulos.

1) El kiosco de diarios y varios del señor Aránguiz, ubicado en la calle Manuel Montt con Caupolicán, en la ciudad de Temuco, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del kiosco es de 60º, **¿cuál es la altura del kiosco?**

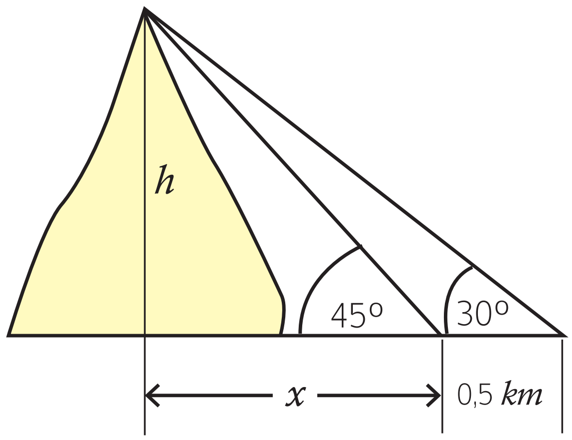


En el triángulo de la figura, se deben relacionar los datos y la incógnita mediante la razón trigonométrica que corresponde. En este caso, el ángulo de 60º, el cateto opuesto a este ángulo, de medida **y**, y el cateto adyacente al mismo ángulo, de medida 1,8 m, deben relacionarse mediante la tangente. Así:

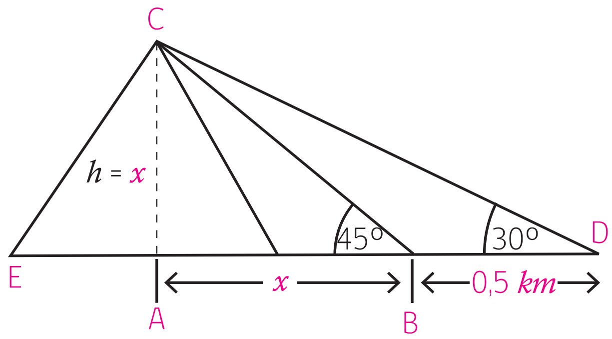
$$\tan 60^\circ = \frac{y}{1{,}8} \longrightarrow y = 1{,}8 \cdot \tan 60^\circ = 1{,}8 \cdot \sqrt{3} = 3{,}12 \text{ m}$$

La altura aproximada del kiosco es de: ....

2) Un topógrafo utiliza un instrumento llamado teodolito para medir el ángulo de elevación entre la cima del cerro y el nivel del suelo. En un punto, el ángulo de elevación mide 45º, medio kilómetro más lejos del cerro el ángulo de elevación es de 30º. **¿Cuál es la altura del cerro?**



Solución:
la situación se puede modelar así:



El triángulo ABC es rectángulo isósceles, porque:

. . . .

Luego el segmento $\overline{AB} = x$. En el triángulo ADC determinamos la tangente de 30º, que se escribe:

$$\tan 30° = \frac{x}{x + 0{,}5}$$

$$(x + 0{,}5) \tan 30° = x$$

$$(x + 0{,}5)\,(0{,}58) = x$$

$$0{,}58x + 0{,}5 \bullet 0{,}58 = x$$

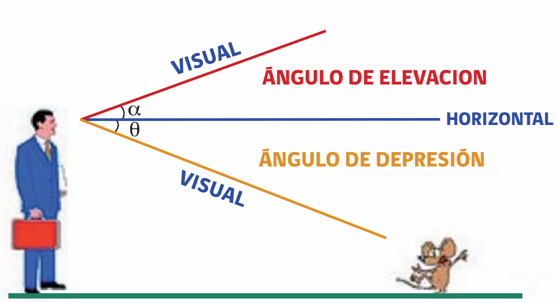
$$0{,}29 = x - 0{,}58x$$

$$0{,}29 = 0{,}42x$$

$$\frac{0{,}29}{0{,}42} = x$$

$$x = 0{,}7$$

TIPS



El **ángulo de elevación** α, está formado por la línea horizontal y la línea que une el punto de mira con el objeto observado por sobre la línea horizontal.

Respuesta:
Por lo tanto la altura del cerro es de 0,7 km.

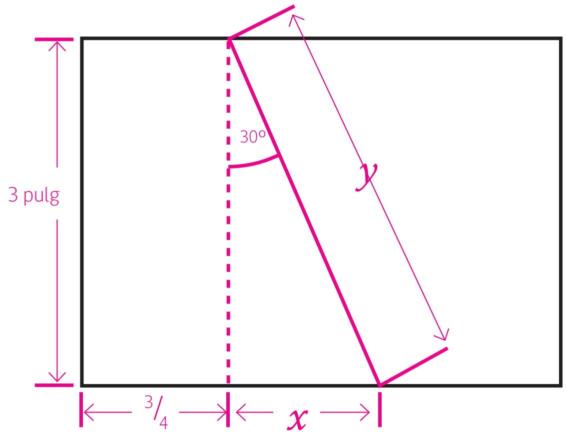
DE_6016.indd 44 25-01-13 17:45

Actividad en el cuaderno

Realice los siguientes ejercicios.

1) Un volantín queda atrapado en las ramas más altas de un árbol; si el hilo del volantín forma un ángulo de 30º con el suelo y mide 8 metros, estimar la altura del árbol calculando la altura a la que quedó atrapado el volantín.

2) Un carpintero corta el borde de un tablero de 3 pulgadas de largo, con una inclinación de 30º de la vertical, empezando desde un punto situado a ¾ pulgadas del borde del tablero. Determinar las longitudes del corte diagonal y del lado restante. (Ver figura)

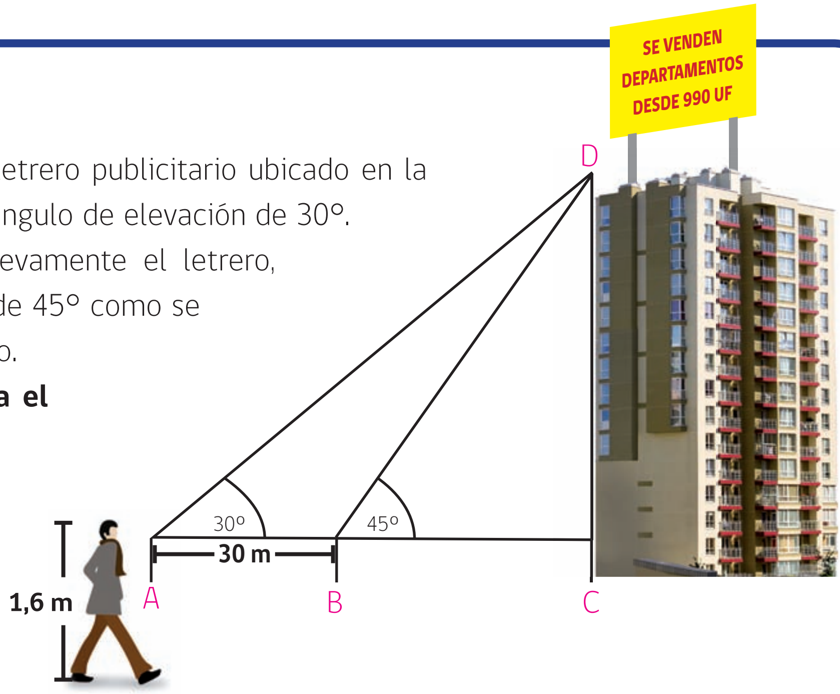


3) Una palmera proyecta una sombra de 18 metros de largo, si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto de la palmera es de 60º, **¿cuál es la altura de la palmera?**
Sugerencia: antes de resolver el problema, dibuje la situación.

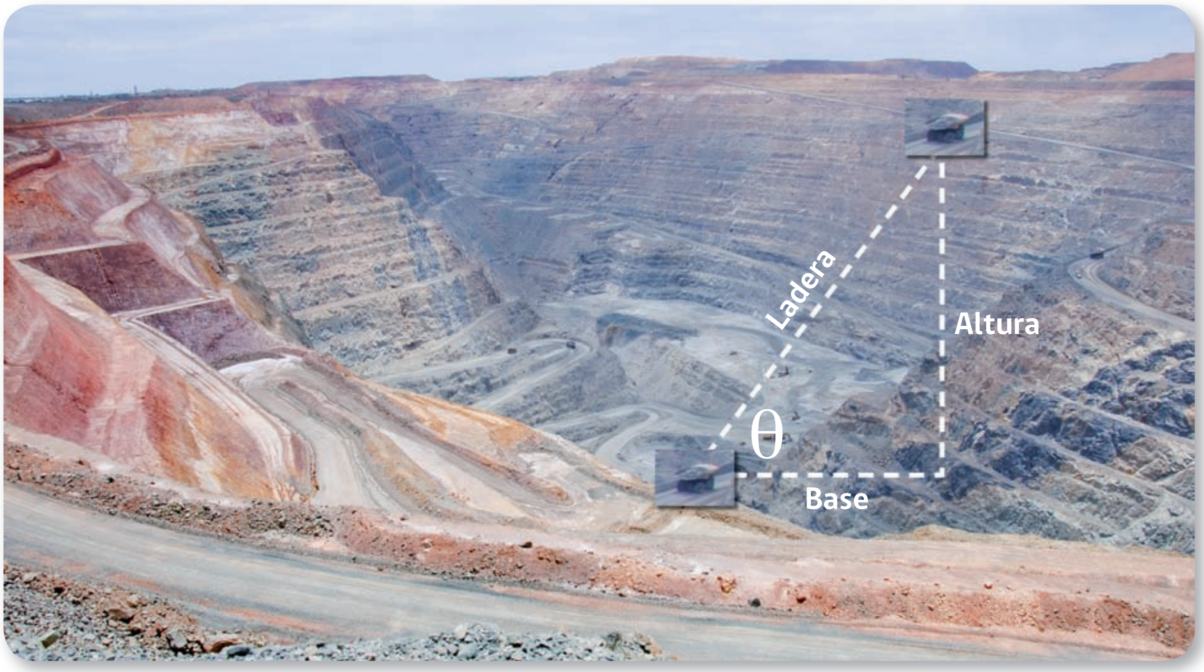
Actividad en el cuaderno

4) Una persona observa un letrero publicitario ubicado en la punta de un edificio con un ángulo de elevación de 30°. Avanza 30 m y observa nuevamente el letrero, con un ángulo de elevación de 45° como se muestra en el siguiente dibujo.

¿A qué altura se encuentra el letrero?



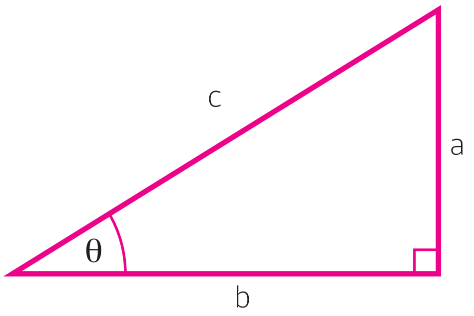
5) Dado el dibujo de una mina a tajo abierto, usando un esquema de triángulo rectángulo, determine cuál de las siguientes operaciones permite calcular el *sen* θ.



a) La medida de la altura, dividida por el largo de la base.
b) El largo de la ladera, dividido por la medida de la altura.
c) El largo de la base, dividido por el largo de la ladera.
d) La medida de la altura, dividida por el largo de la ladera.

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Dado el triángulo rectángulo:



El Teorema de Pitágoras, plantea:

$c^2 = a^2 + b^2$ / al dividir por c^2

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$1 = sen^2\,\theta + cos^2\,\theta$$

Porque de acuerdo a las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo:

$$cos\,\theta = \frac{b}{c} \qquad sen\,\theta = \frac{a}{c}$$

ACTIVIDAD **Complete las siguientes identidades trigonométricas, utilizando los datos del triángulo dado arriba:**

1) $(cosen\theta)(\sec\theta) =$

2) $(sen\,\theta)(\csc\theta) =$

3) $(\tan\theta)(\cot\theta) =$

4) $\dfrac{sen\ \theta}{\cos\ \theta} =$

5) $\dfrac{\cos\ \theta}{sen\ \theta} =$

6) $\dfrac{\sec\ \theta}{\csc\ \theta} =$

7) $\dfrac{\csc\ \theta}{\sec\ \theta} =$

TIPS

Otras identidades pitagóricas:

$1 + tan^2\,\theta = sec^2\,\theta$

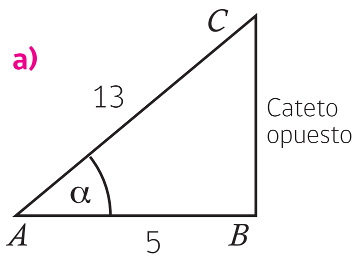
$1 + cot^2\,\theta = csc^2\,\theta$

¿Cómo cree usted que se determinaron estas identidades? Discutirlo en grupos

ACTIVIDAD **Resuelva lo indicado en cada caso:**

Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ señalado en cada triángulo:

a)



Aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar el valor del cateto opuesto.

sen α =

cos α =

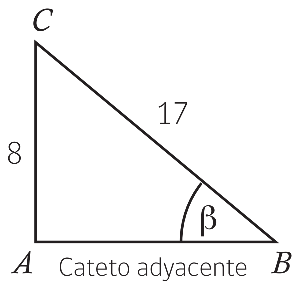
tan α =

csc α =

sec α =

cot α =

b)



Aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar el valor del cateto adyacente.

sen β =

cos β =

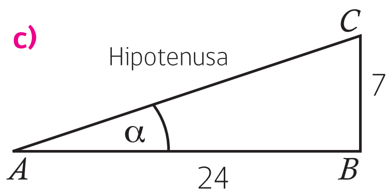
tan β =

csc β =

sec β =

cot β =

c)



Aplicar el Teorema de Pitágoras para determinar el valor de la hipotenusa.

sen α =

cos α =

tan α =

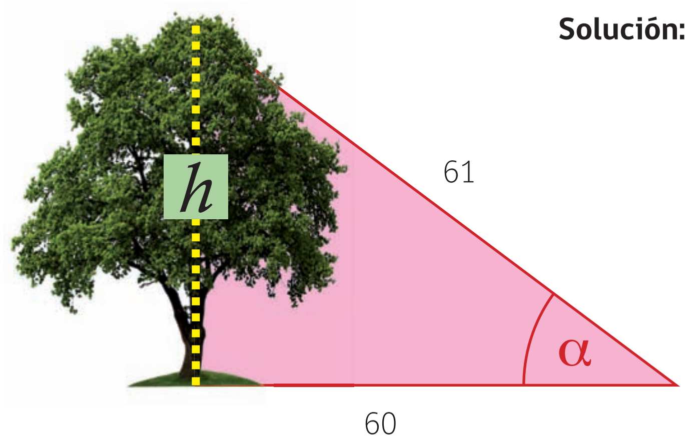
csc α =

sec α =

cot α =

Observe y estudie detenidamente cada ejemplo de situaciones resueltas:

1) Un árbol proyecta una sombra de 60 m de largo. Escriba una expresión que permita determinar la altura del árbol en ese momento.



Solución: Como no sabemos la medida del ángulo α, la expresión que nos sirva para determinar la altura del árbol es el Teorema de Pitágoras.

$61^2 = 60^2 + h^2$

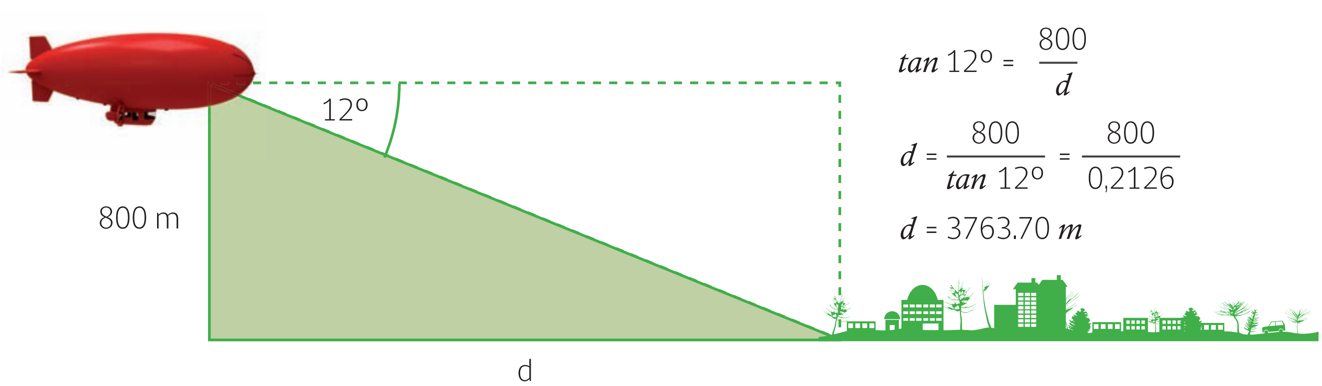
$h^2 = 3.721 - 3.600$

$h^2 = 121 \,/ \pm\sqrt{\ }$

$h = 11$

Por lo tanto la altura h del árbol es de 11 m.

2) Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12º. **¿A qué distancia del pueblo se encuentra?**



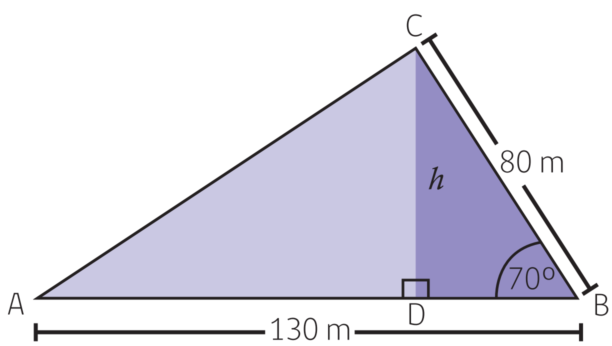
Solución:

$$\tan 12^\circ = \frac{800}{d}$$

$$d = \frac{800}{\tan 12^\circ} = \frac{800}{0{,}2126}$$

$$d = 3763.70\ m$$

3) Calcule el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m y forman entre ellos un ángulo de 70º. (Sugerencia: el área de un triángulo es: $A = \dfrac{b \bullet h}{2}$)



Solución:

Para determinar la altura h, se utilizará la función *seno*, aplicada a 70º:

$$\text{sen } 70^\circ = \frac{h}{80} \longrightarrow h = 80 \bullet \text{sen } 70^\circ$$

Por lo tanto el área aproximada es:

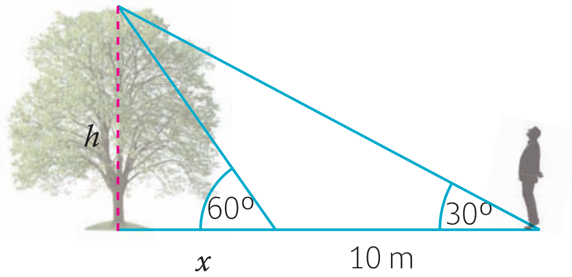
$$A = \frac{130 \bullet 80 \bullet \text{sen } 70^\circ}{2} \approx 4.887\ m^2$$

4) Juan observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 30º, luego avanza diez metros y ahora observa la misma copa del árbol con un ángulo de elevación de 60º.
Calcule la altura del árbol.

Solución: Se calcula la tangente de 30º: $tan\ 30º = \dfrac{h}{10 + x} \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{10 + x}$

$$\rightarrow \sqrt{3}\,(10 + x) = 3 \bullet h$$

$$\rightarrow \sqrt{3} \bullet 10 + \sqrt{3} \bullet x = 3h$$



Se calcula la tangente de 60º: $tan\ 60º = \dfrac{h}{x} \rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$

$$\rightarrow h = x\sqrt{3}$$

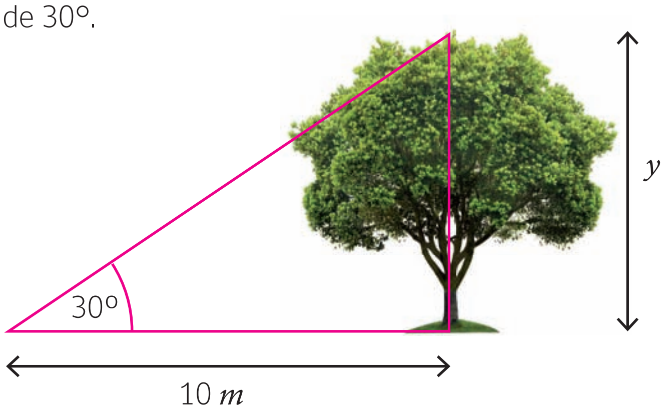
Se escribe un sistema de ecuaciones y se resuelve por reducción

$$\left.\begin{array}{r} 10\sqrt{3} + x\sqrt{3} = 3h \\ x\sqrt{3} = h \end{array}\right| / \bullet (-1) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} 10\sqrt{3} + x\sqrt{3} = 3h \\ -x\sqrt{3} = -h \end{array}\right| /+$$

$$10\sqrt{3} = 2h \longrightarrow h = 5\sqrt{3}$$

Por lo tanto la altura aproximada del árbol es de 8,7 m.

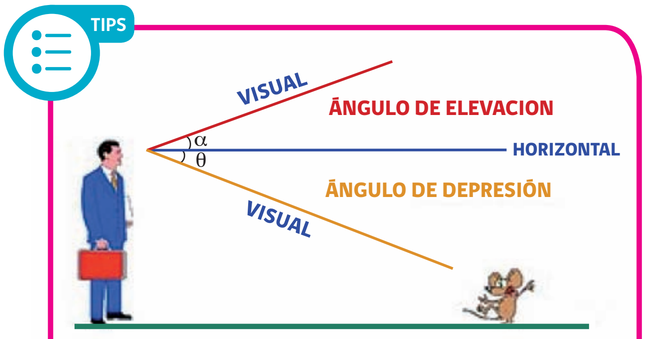
5) Calcule la altura de un árbol que a una distancia horizontal de 10 m, su copa se observa con un ángulo de 30º.



Solución:
La altura y del árbol se determina utilizando la tangente de 30º:

$$tan\ 30º = \frac{y}{10} \rightarrow y = 10 \bullet tan\ 30º \rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5{,}8\text{m.}$$

Por lo tanto la altura del árbol es 5,8 m aproximadamente.

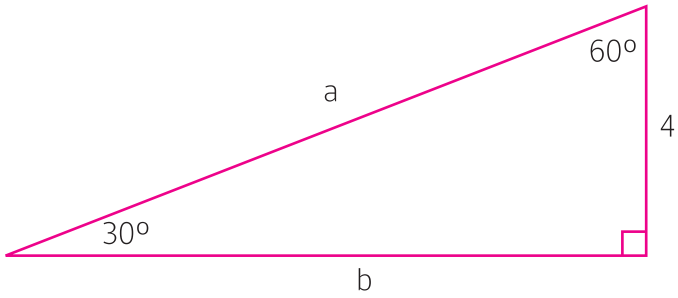


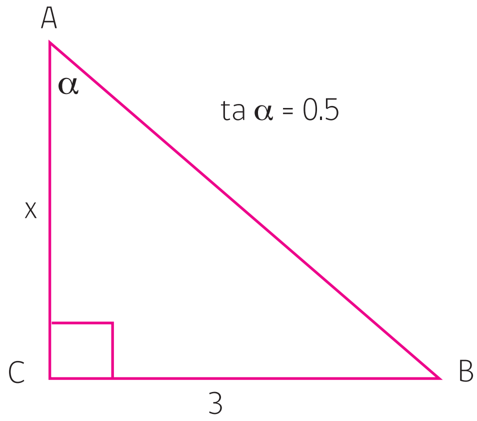
El **ángulo de depreción** α, está formado por la línea horizontal y la línea que une el punto de mira con el objeto observado por debajo la línea horizontal

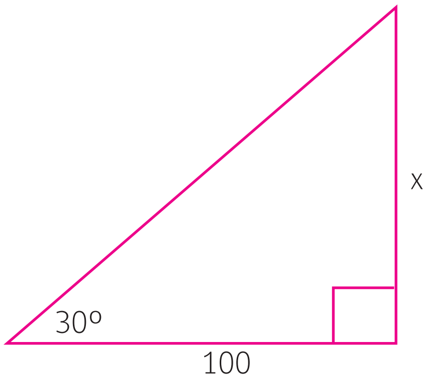
EVALUACIÓN

Evaluación: resuelva lo pedido en cada caso:

1) Utilizando los valores de las razones trigonométricas seno, coseno o tangente de la medida de los ángulos, determine las incógnitas pedidas en cada caso:







2) Un motosierrista debe talar un viejo canelo, para que no caiga con el viento y bloquee el camino o se desplome encima de las casas aledañas. Para dirigir su caída debe estimar su altura, ubicándose aproximadamente a 51,5 metros del pie del árbol. Desde el punto de ubicación, el motosierrista mira la parte superior del árbol con un ángulo de elevación de 30º. La estatura del motosierrista es de 1,8 m aproximadamente. Con estos datos ayúdele a estimar la altura del canelo.

3) En cada caso, de acuerdo a los datos, determine los valores de las medidas de lados y ángulos restantes en el triángulo rectángulo de la figura:

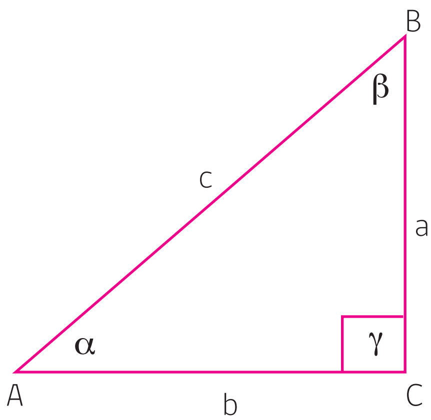
a) $\alpha = 30º$, $b = 10$

b) $\beta = 45º$, $b = 35$

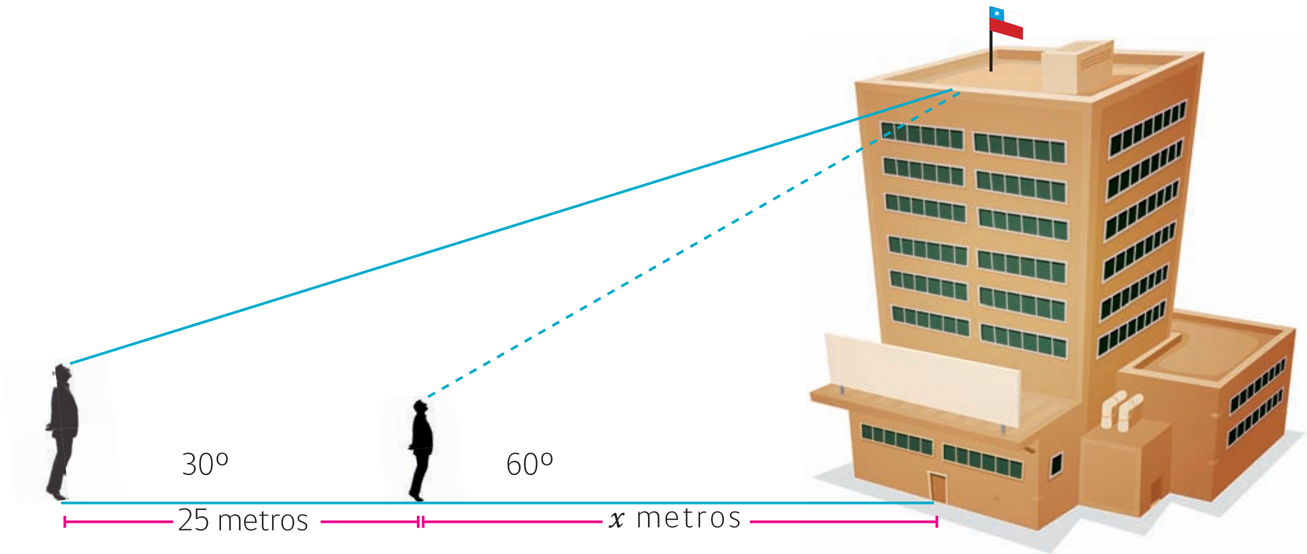
c) $c = 14$, $b = 7\sqrt{2}$

d) $\alpha = 4\sqrt{3}$, $c = 8$

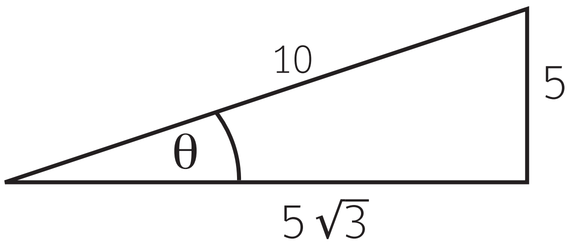
e) $\alpha = 60º$, $c = 6$



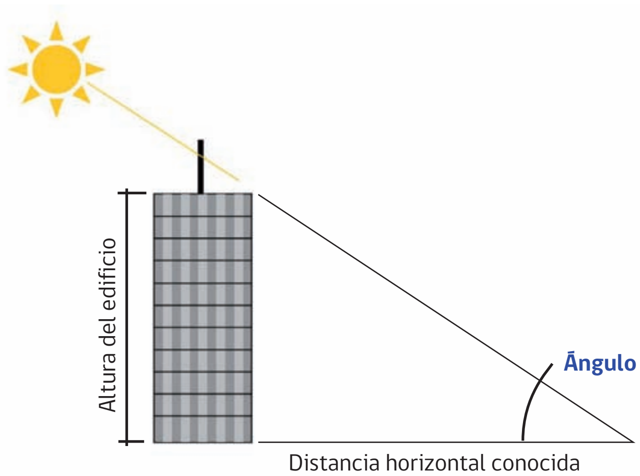
4) Una persona observa el borde superior de la cornisa de un edificio con un ángulo de elevación de 30º, luego avanza aproximadamente 25 m en línea recta hacia la entrada del edificio y observa la cornis con un ángulo de elevación de 60º. Considerando que la vista del observador está a 1,60 m del suelo, **¿cuál es la altura aproximada del edificio?**



5) Un constructor debe construir una rampa de descarga de 10 m de largo que se levantará a una altura del suelo de 5 m. Determine el ángulo de la rampa con la horizontal.



6) Calcule la altura de un edificio que da una sombra de 15 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 30º con la horizontal. Apóyese en la figura colocando en ella los datos y la incógnita:



BIBLIOGRAFÍA

1) Decreto Supremo (Ed.) Nº 211 de 2009 que reemplaza el Decreto Nº 131 de 2003 sobre nivelación de estudios de adultos. MINEDUC.

2) Decreto Supremo (Ed.) Nº 257 de 2009 que deroga Decreto Supremo de Educación Nº 239 de 2004 sobre el marco curricular de la educación de adultos.

3) Peterson, John A. y cols. (2002). *Teoría de la aritmética*. Ciudad de México, México: Editorial Limusa-Wiley.

4) Zill, D. y Dewar, J. (1996). *Álgebra y trigonometría*. Ciudad de México, México: McGraw-Hill.

5) Swokowski, E. y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Ciudad de México, México: Editorial Cengage.

6) Stewart, J y otros. (2007). *Introducción al cálculo*. México: Editorial Thompson.

Sitios en internet

Trigonometría:

1) http://www.librosvivos.net/smtc/homeTC.asp?TemaClave=1173

2) http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=138399

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo:

1) http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Trigonometria_Razones.html

2) http://www.walter-fendt.de/m14s/sincostan_s.htm

3) http://www.educarchile.cl/UserFiles/P0024/File/skoool/matematica%20y%20geometria/funciones%20trigonometricas/index.html

Teorema de Pitágoras:

1) http://www.educarchile.cl/UserFiles/P0024/File/skoool/Latin_America_Content/Latin_AmericaContent/Junior%20Cycle%20level%201/maths/transcriptos/pythagoras_eg1/index.html

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile